

Couret–Unification

Plan de formation — v7 illustrée et alignée Lean v38

Dispositif de formation au discernement scientifique

*Apprendre à penser avec rigueur devant l'incertain :
preuve, mesure, conjecture et responsabilité à l'âge des IA*

« Fini là où c'est prouvé.
Ouvvert là où c'est global.
Typé là où c'est incertain.
Gardé là où c'est tentant. »

`RHClaimed = false • TopologicalUniversalityClaimed = false`

Dispositif de formation au discernement scientifique

Avril 2026

Version 7 — 20 figures pédagogiques + 8 figures Q (alignement Lean v38)

Avant-propos

Ce dossier ne cherche pas à vous convaincre du programme Couret–Unification. Il cherche à vous donner quelque chose de plus durable : la capacité de savoir ce qu'une affirmation autorise vraiment à dire.

Vous allez passer deux journées avec moi sur un programme de recherche — le programme Couret–Unification — qui formalise une structure mathématique autour des nombres premiers modulo 30. Ce que je veux vraiment vous apprendre, ce n'est pas le contenu du programme. C'est une **posture intellectuelle** : reconnaître une idée séduisante, refuser sa promotion prématurée, la tester, la typer, puis la formuler avec exactitude.

Cette posture, je l'appelle l'**immunité épistémique active**. Comme un système immunitaire, elle se construit par exposition contrôlée à des erreurs séduisantes, suivie de la production d'anticorps : des règles, des gardes, des gestes. Le programme Couret–Unification est notre laboratoire d'erreur contrôlée.

Il a connu, en avril 2026, un incident parfaitement instructif (l'incident $\sigma_G^* = \pi/10$) que vous allez traverser comme cas-école.

Le dossier est calibré pour un profil de scientifique généraliste rigoureux. Je vous parlerai comme à un scientifique généraliste rigoureux — ni comme à un mathématicien spécialisé, ni comme à un débutant qu'on rassurerait. Vous avez la formation pour comprendre. Vous n'as pas besoin de maîtriser la théorie des nombres ni la théorie des catégories. Le dispositif vous montrera ce qu'il faut au moment où il faut.

Ce qui change par rapport à v6

Cette v7 prolonge la v6 (augmentation illustrée de la v5) en intégrant l'alignement sur la doctrine Lean v38 unifiée livrée le 27 avril 2026. Le contenu doctrinal et la structure (architecture pédagogique, trois parcours, six statuts, huit règles, mini-soutenance) sont préservés intégralement. Ce qui s'ajoute :

- **Vingt figures scientifiques.** Onze planches infographiques (architecture, boussole épistémique, registre des claims, adjonction Hilbert–Pólya, feuille de route T0–T4, noyau spectral fini, dépromotion R8, classes mod 30 et fantôme 19, λ après M56, Cayley octogonal, blindage 10 tests) au style éditorial soigné, complétées par neuf graphiques scientifiques classiques (distributions, spectres, courbes mpmath, matrices). Beaucoup ont été produites pour le dossier Riposo ou la conférence de Norwich.
- **Mélange des registres.** Les figures infographiques portent les schémas conceptuels (cartes, échelles, adjonctions) ; les graphiques scientifiques portent les mesures (histogrammes, courbes, χ^2). Cette double présentation reflète les deux niveaux du programme : structure et donnée.
- **Détail accru de chaque chapitre.** Chaque section §X.Y est désormais développée — exemples concrets, calculs explicites, dérivations pas-à-pas, anecdotes pédagogiques. Le volume de texte est environ doublé.
- **Tableaux supplémentaires.** Le profil spectral des huit caractères, la matrice de Sophie Germain, les résultats M56 — tous présentés sous forme de tableaux directement lisibles.
- **Encadrés « pourquoi cela compte ».** À la fin de chaque chapitre lourd, un encadré de transfert direct vers votre vie professionnelle (sciences, ingénierie, audit IA).
- **Deux nouvelles annexes.** Annexe C — Registre synthétique des claims (table de chevet pour communications publiques) ; Annexe D — Tests numériques de blindage (planche scientifique de validation, dix tests indépendants).

Une nouvelle annexe F (mise à jour v38, ajoutée le 27 avril 2026). Entre la rédaction de v6 et son envoi, le programme a connu une consolidation Lean v38 unifiée qui change l'objet géométrique primitif (TC est désormais lu comme le Klein ponctué $K_4 \setminus \{19\}$), introduit de nouveaux invariants candidats (rigidité par paires, trace protégée), et réorganise les routes analytiques (Smooth Bump v2 principal, Tchebychev fallback, bande σ admissible). L'annexe F porte ces mises à jour. Le corps du dossier reste valide ; l'annexe F vous dit ce qui doit être lu différemment maintenant. RHClaimed = false reste verrouillé.

Comment lire le dossier illustré

Les figures ne sont pas décoratives. Chacune porte une **information précise** qui complète le texte. Trois bons réflexes :

1. **Avant de lire la légende,** regarde la figure et essaie d'en énoncer la conclusion. Si vous ne vois pas, c'est que la figure est dense — pas que vous êtes lent.
2. **Cherche le tag épistémique.** Quasi toutes les figures incluent quelque part [P], [P|H], [E], [C], [T] ou [O]. C'est la grille de lecture transversale du dossier.

3. Note la légende couleur. La palette est cohérente sur tout le dossier : vert = prouvé, vert hachuré = sous hypothèse, bleu = empirique, violet = conjectural, orange = cible théorème, gris = ouvert.

Architecture d'apprentissage — ce que vous allez apprendre à faire

Avant de plonger dans les chapitres, voici les six compétences que ce dossier vise. Chacune est mesurable. À la fin des deux journées et des quatre semaines, vous devriez pouvoir cocher les six.

Compétence	Critère de réussite
Typier une affirmation	Vous savez classer une phrase en [P], [P H], [E], [C], [T] ou [O]. Vous savez justifier le choix en une phrase.
Distinguer local et global	Vous repérez quand une preuve locale est transformée abusivement en revendication globale, et vous savez reformuler.
Lire une hypothèse	Vous savez identifier l'hypothèse cachée d'un théorème conditionnel, et dire ce qui se passe si l'hypothèse tombe.
Auditer une valeur numérique	Devant toute valeur, vous demandez méthode, précision, plage, reproductibilité (R1).
Résister au consensus IA	Vous savez que trois IA d'accord ne remplacent pas un test arbitraire-précision (R3). Vous savez nommer la circularité InterIA.
Transférer la méthode	Vous savez appliquer les huit règles à un problème concret hors du programme : réseau, sécurité, IA, audit technique.

Tableau 1 — Les six compétences mesurables visées par le dispositif.

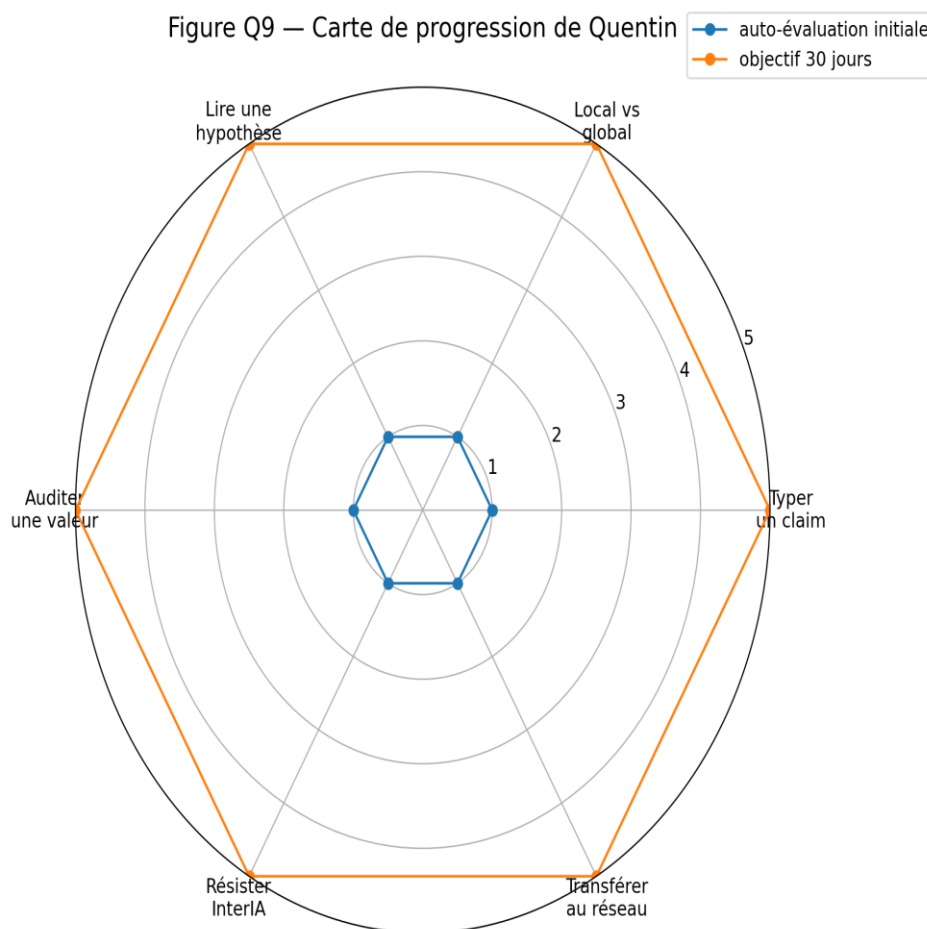


Figure Q9 — Carte de progression de l'apprenant. Six compétences mesurables organisées en hexagone. Le profil bleu intérieur est votre auto-évaluation initiale (note-vous de 1 à 5 avant le dispositif) ; le profil orange extérieur est l'objectif à 30 jours. Reprends cette carte à la fin des deux journées puis aux jours 7, 14, 30 — c'est votre thermomètre, il indique le delta réel.

Auto-évaluation rapide (avant le dispositif)

Pour chaque compétence ci-dessus, note-vous de 0 à 5. Refais l'auto-évaluation après les deux journées, puis après les 30 jours. C'est votre thermomètre — il indique le delta réel, pas la valeur absolue.

Trois parcours de lecture — choisis selon votre temps

Parcours A — Survie épistémique (30 minutes)

Pour comprendre la doctrine minimale du programme et avoir la grille de discernement la plus utile.

- Phrase directrice (couverture, 1 min).
- Cinq invariants doctrinaux (page 2, 2 min).
- Carte des six statuts épistémiques (5 min).
- Carte visuelle des couches — Figure 1 (5 min).
- Chapitre 5 — incident σ_G^* (15 min).
- Les huit règles, version courte (2 min).

Parcours B — Formation complète (2 journées)

Le chronogramme du chapitre 14 : J1 sur discernement et noyau fini ; J2 sur cibles, cadre catégorique, exercices et mini-soutenance.

Parcours C — Maîtrise autonome (30 jours)

Plan thématique par semaines, 2 à 4 heures par semaine, avec un livrable concret à la fin de chaque semaine. Détaillé au chapitre 15.

Semaine	Thème	Livrable
S1	Maîtriser les statuts	Une page : « Je sais distinguer [P], [P H], [E], [C], [T], [O] » avec exemple personnel.
S2	Pratiquer la discipline	Une analyse d'un claim marketing ou scientifique récent, avec application des huit règles.
S3	Approfondir le cadre	Une carte mentale des quatre niveaux de η_X , avec un autre exemple d'adjonction.
S4	Synthèse et transfert	Une mini-soutenance de 10 minutes, avec barème auto-appliqué.

Tableau 2 — Plan d'étude autonome sur 30 jours.

Cinq invariants doctrinaux

Les cinq invariants suivants ne sont jamais franchis dans ce dossier. Si à un moment vous lisez une phrase qui semble en contradiction avec l'un d'eux, c'est que j'ai mal écrit — ou que vous avez bien lu et que vous avez raison de signaler.

Invariant	Statut	Levable seulement par
RHClaimed	false	Démonstration HP-faible ou HP-fort.
TopologicalUniversalityClaimed	false	T1, T2, T3 prouvés.
T0_Proven	false	Égalité $\lambda_{\text{simplexe}} = \lambda_{\text{TDA}}$ démontrée.
T1_Proven	false	Trois verrous (existence, continuité, concentration) levés pour le DPP sine.
HP_Strong_Proven	false	Foncteur K_{HP} équivalence sur l'objet critique.

Tableau 3 — Les cinq invariants doctrinaux du programme. Tous à false.

Pourquoi cinq, pas un seul ? Parce qu'il y a cinq portes différentes par lesquelles une revendication trop forte pourrait s'introduire, et chaque invariant ferme une porte particulière. Réduire à un seul invariant, ce serait laisser quatre portes ouvertes.

Carte visuelle du programme — six couches superposées

La carte qui suit donne en une page la structure entière du programme. Chaque couche a son statut épistémique. Les flèches descendent du concret (en haut) vers l'abstrait (en bas). C'est la **figure de référence** du dossier — toutes les autres y renvoient.

Architecture scientifique du programme Couret–Unification

Du noyau fini démontré à l'horizon ouvert, avec discipline déclarative explicite

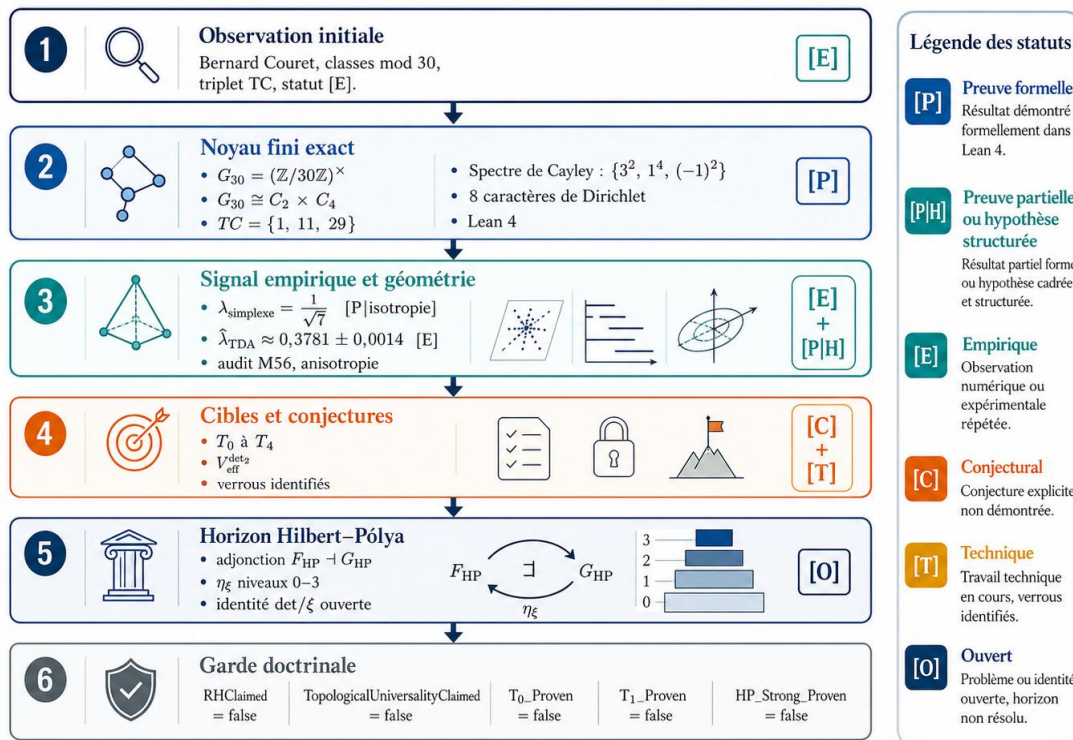


Figure 1 — Architecture scientifique du programme Couret–Unification, du noyau fini démontré à l'horizon ouvert. Six niveaux superposés (observation, noyau fini, signal empirique et géométrie, cibles et conjectures, horizon Hilbert–Pólya, garde doctrinale) chacun avec son tag épistémique et sa légende détaillée des statuts. C'est la carte de référence du dossier.

Cette carte sera référencée à la fin de chaque chapitre, avec la couche concernée surlignée mentalement. Apprends-la par cœur : c'est la carte mère du programme.

Lecture verticale et horizontale

La carte se lit dans deux sens. **Verticalement**, elle dit que le programme part d'observations empiriques (Bernard Couret), construit un noyau fini démontré (G_{30} , TC, spectre Cayley), mesure des signaux empiriques ($\hat{\lambda}_{\text{TDA}}$, M56), formule des conjectures et cibles théorèmes (T_0 – T_4 , V_{eff}), et vise un horizon catégorique (adjonction HP) qui reste ouvert.

Horizontalement, chaque couche porte un statut épistémique (à droite) qui indique le degré de certitude. Le passage d'une couche à la suivante augmente l'ambition mais réduit la certitude. C'est la pente naturelle du programme — et la garde doctrinale (couche du bas) empêche la pente de se transformer en glissement.

Six statuts épistémiques avec système de couleurs

Toute affirmation circulant dans le programme porte un tag entre crochets. Six tags possibles, six couleurs associées pour reconnaissance immédiate.

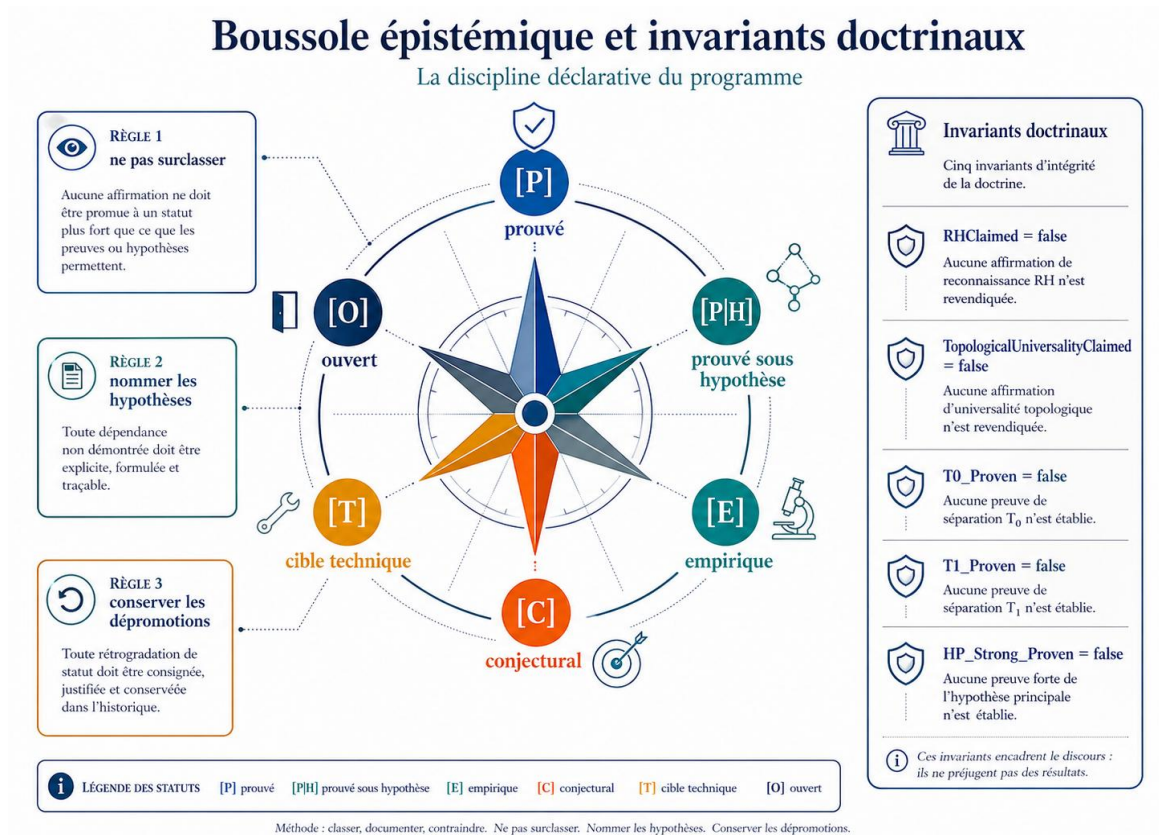


Figure 2 — Boussole épistémique et invariants doctrinaux. Au centre, la rose des six statuts ([P], [P|H], [E], [C], [T], [O]). À gauche, les trois règles de la discipline déclarative (ne pas surclasser, nommer les hypothèses, conserver les dépromotions). À droite, les cinq invariants doctrinaux du programme — tous à false. Apprends ces couleurs par cœur : elles structurent toute la lecture du dossier.

Tag	Couleur	Sens	Exemple concret du programme
[P]	vert foncé	Prouvé	$ G_{30} = 8$. Démontré en Lean 4 par decide. Sans hypothèse cachée.
[P H]	vert hachuré	Prouvé sous H	[P isotropie] $\lambda = 1/\sqrt{k-1}$. Théorème vrai, mais hypothèse réfutée empiriquement (M56).
[E]	bleu	Empirique	$\hat{\lambda}_{TDA} \approx 0,3781 \pm 0,0014$ sur 350 zéros, KS $p \approx 0,73$, reproductible.
[C]	violet	Conjectural	Conjecture Q3 : $V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}(q, 1/2) \sim c \cdot \kappa(q)^2$ sur la tour primorielle.
[T]	orange	Cible théorème	T0, T1, T2, T3, T4. Énoncé posé, verrous identifiés, preuve à compléter.
[O]	gris	Ouvert	Mur H3 : $\langle r \rangle \approx 0,62 > \text{GUE}$. Phénomène empirique sans énoncé formel.

Tableau 4 — Les six tags épistémiques en détail, avec exemples concrets.

Pourquoi le tag $[P|H]$ est essentiel

Un théorème conditionnel (« sous l'hypothèse H , on a ψ ») peut être techniquement $[P]$. Mais si H est elle-même contestée — empiriquement réfutée, ou simplement ouverte — communiquer le théorème comme $[P]$ sans nommer H est trompeur. Le tag $[P|H]$ préserve la rigueur formelle tout en signalant la fragilité du contexte d'application.

Exemple central

$[P|\text{isotropie}]$: sur le simplexe Δ^7 supposé isotrope, $\lambda = 1/\sqrt{7}$ est un invariant de Fisher–Rao. Théorème démontré. Mais l'audit M56 (mars 2026) a réfuté empiriquement l'isotropie sur G_{30} . Le théorème reste mathématiquement vrai ; sa portée opérationnelle est diminuée.

Sans le tag $[P|H]$, on aurait été tenté de dire « λ est un invariant universel ». Avec le tag, on sait dire avec exactitude : « λ est un invariant géométrique conditionnel dont l'hypothèse n'est pas universellement satisfaite ». Plus exigeant à formuler. Plus juste à dire.

Transfert direct : en réseau, c'est la différence entre « notre système supporte 100 000 connexions/s » (claim brut) et « notre système supporte 100 000 connexions/s sous trafic synthétique sans pertes réseau » ($[P|H]$). La seconde formulation préserve la vérité du benchmark sans masquer la fragilité du contexte.

Chapitre 0 — Pourquoi ce dossier existe

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 0 Compétence visée — Comprendre la fonction du dossier dans votre formation. Idée-clé — Le dossier ne vous demande pas de croire au programme. Il vous forme à savoir ce qu'une affirmation autorise à dire. Erreur typique — Confondre « comprendre le programme » avec « être convaincu par le programme ». Geste scientifique attendu — Identifier votre posture de lecteur (curieux, sceptique, critique, exigeant) et la maintenir explicite. Question finale — Si vous repars sceptique sur le programme global mais lucide sur la grille de lecture, le dossier a réussi. Vrai ou faux ?

0.1 La question pratique

Vous avez un week-end à passer avec moi sur le programme Couret–Unification. Mon but n'est pas de vous transmettre des résultats que vous n'utiliserez jamais. Mon but est de vous donner une **grille de discernement** qui vous servira partout : dans votre carrière en informatique réseau, dans votre vie de citoyen lisant la presse scientifique, dans votre usage quotidien des outils IA.

La différence entre les deux objectifs est cruciale. Le premier — transmettre des résultats — produit un savoir périssable : vous oublierez les énoncés du noyau fini en six mois si vous ne les pratiques pas. Le second — transmettre une grille — produit un savoir durable : la posture qui consiste à demander, devant chaque affirmation, son statut, son hypothèse, sa conséquence vérifiable, c'est une compétence qui se renforce avec l'usage et ne s'oublie pas.

0.2 Six distinctions que ce dossier veut vous apprendre

Voici les six distinctions qui structurent toute la pensée scientifique rigoureuse, et que je vais vous apprendre à manier :

- **intuition** — ce qu'on pressent avant de pouvoir le formuler
- **signal** — ce qu'on mesure et qui revient
- **preuve** — ce qu'on peut vérifier ligne à ligne
- **conjecture** — ce qu'on formule comme falsifiable
- **cible théorème** — ce qu'on a posé proprement et qu'on cherche à démontrer
- **horizon ouvert** — ce dont on ne sait pas encore formuler la version définitive

Ces six niveaux ne sont pas qu'un classement — ils correspondent à six **comportements épistémiques différents**. Une intuition se cultive en silence. Un signal se mesure avec rigueur. Une preuve se vérifie. Une conjecture se publie pour qu'elle soit attaquée. Une cible théorème s'attaque techniquement. Un horizon se laisse mûrir.

Confondre les niveaux mène à des fautes typiques : annoncer une preuve quand on n'a qu'un signal ; publier une intuition au lieu de la cultiver ; déclarer un horizon clos parce qu'on a une cible théorème.

0.3 Pourquoi c'est précisément utile pour vous

Un scientifique généraliste rigoureux va, dans sa carrière, lire des dossiers techniques, des spécifications, des claims de constructeurs, des bilans d'incidents, des rapports d'audit. Vous allez aussi travailler avec des IA — pour générer du code, pour synthétiser, pour explorer.

Dans tous ces contextes, **la première compétence n'est pas de produire des résultats, c'est de savoir évaluer ce qu'un résultat affirme exactement**. Un firewall qui « bloque 99,7 % des attaques », est-ce une mesure ([E]) ou un slogan ? Un protocole de sécurité qui « est prouvé sûr », est-ce un théorème ([P]) ou

une affirmation marketing ? Une nouvelle architecture qui « pourrait remplacer TCP », est-ce une cible ([T]) ou une intuition ?

Vous n'auras pas le temps de devenir expert sur chaque sujet de votre métier. Mais vous pouvez toujours vous demander, en quinze secondes : **quel statut épistémique cette phrase a-t-elle ?** Cette question, à elle seule, sépare les professionnels lucides des autres.

✓ Ce que je peux dire — Le dossier vise à vous former au discernement scientifique sur un programme réel. X Ce que je ne peux pas dire — Le dossier vise à vous convaincre du programme Couret–Unification.
→ Bonne formulation — Le dossier utilise le programme comme cas d'étude pour transmettre une grille de lecture transférable, indépendamment de la valeur scientifique finale du programme.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Aucun théorème dans ce chapitre — c'est l'orientation.
- **[E] Ce qui est empirique** : Aucune mesure.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture.
- **[O] Ce qui est ouvert** : L'efficacité réelle du dispositif comme outil de discernement — à tester en fin de parcours.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Ce que le dossier vise (grille de lecture) et ce qu'il ne vise pas (conviction sur le programme).

Exercice : Reformule en vos propres mots les six distinctions de §0.2, sans recopier.

Chapitre 1 — Comment lire un programme ambitieux sans se perdre

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 1 Compétence visée — Acquérir une grille de lecture en quatre questions à appliquer à toute affirmation technique. Idée-clé — Quand un objet est nommé, il n'est pas pour autant démontré. Le statut épistémique compte plus que le vocabulaire. Erreur typique — Se laisser emporter par l'élégance du vocabulaire et croire qu'un nom évocateur (« adjonction », « foncteur », « invariant ») garantit la rigueur. Geste scientifique attendu — Devant chaque affirmation, demander explicitement : statut, couche, hypothèse, conséquence vérifiable. Question finale — Si je dis « on a montré que », quelle est votre première question ?

1.1 Le piège du vocabulaire impressionnant

Vous allez trouver dans ce dossier des objets impressionnants : graphe de Cayley, métrique de Fisher–Rao, persistance topologique, adjonction catégorique. Le piège, quand on n'est pas dans le métier, est de croire que parce qu'un objet est nommé, il est démontré.

C'est une erreur récurrente, y compris chez des scientifiques chevronnés qui sortent de leur spécialité. Un nom évocateur — « universel », « invariant », « équivalence catégorique », « pont local-global » — agit comme un sceau de rigueur. Mais le sceau ne dit rien sur le contenu.

Or :

- Un objet **entièrement construit et prouvé** — par exemple le graphe de Cayley de TC, son spectre $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$. C'est [P].
- Un objet **partiellement construit, avec hypothèses encore floues** — par exemple l'adjonction $F \dashv G$ dont on a posé la signature mais dont la monadicité n'est pas démontrée. C'est [T] partiellement.
- Un objet **simplement nommé en attente** — par exemple le foncteur de comparaison K_{HP} comme équivalence catégorique. C'est [O].

Trois objets, trois noms savants, trois statuts épistémiques radicalement différents. Le vocabulaire ne vous le dit pas. C'est à vous de le demander.

1.2 La grille en quatre questions

Quand vous lisez un texte technique, pose-vous systématiquement quatre questions :

1. **Quel est le statut ?** [P], [P|H], [E], [C], [T] ou [O] ? S'il n'est pas explicite, demande-le. Une affirmation sans tag est implicitement traitée comme [O] dans le programme.
2. **Quelle est la couche ?** Géométrie/TDA ? Pont local-global ? Démonstration HP ? Discipline méthodologique ? Le programme distingue ces couches strictement (cf. Figure 1).
3. **Quelle est l'hypothèse ?** La plupart des résultats sont conditionnels. Sous quelle hypothèse ? Que se passe-t-il si l'hypothèse tombe ?
4. **Quelle est la conséquence vérifiable ?** Tout résultat doit pouvoir produire une prédiction vérifiable. Si vous ne voyez pas la conséquence, le résultat est trop flou.

Cette grille n'est pas une checklist bureaucratique. C'est un **filtre de lecture** qui se déploie en moins de trente secondes une fois automatisé.

1.3 Test à appliquer pendant les deux journées

À chaque fois que je dis « on a montré que », arrête-moi et demande :

« Montrer au sens de $[P]$, $[P|H]$, $[E]$ ou $[C]$? »

Si je suis honnête, je répondrai sans hésiter. Si j'hésite ou je fais un détour, c'est que ma formulation était glissante — et vous aurez attrapé un défaut de discipline.

Vous pouvez faire la même chose dans votre métier. Devant un commercial qui vous dit « notre solution garantit la haute disponibilité », demande : « garantie au sens contractuel ($[P|H]$ avec H = clauses du SLA), au sens empirique ($[E]$ sur quel échantillon ?), ou au sens marketing ? ». Vous serez peut-être considéré comme pénible. Mais vous aurez dégagé l'information utile.

✓ Ce que je peux dire — La grille en quatre questions s'applique à toute affirmation technique. X Ce que je ne peux pas dire — Le vocabulaire mathématique impressionnant garantit la rigueur de ce qu'il désigne.
→ Bonne formulation — Un objet nommé peut être à n'importe quel statut — $[P]$, $[P|H]$, $[E]$, $[C]$, $[T]$, $[O]$.
La grille des quatre questions permet de classer.

Synthèse de fin de chapitre

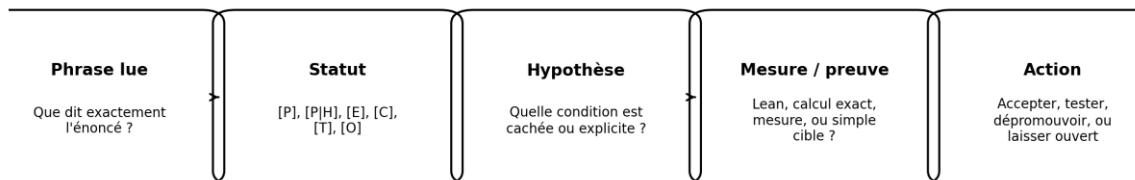
- **[P] Ce qui est prouvé** : Aucun théorème — c'est un chapitre de méthode.
- **[E] Ce qui est empirique** : Aucune mesure.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Comment cette grille performe-t-elle face à des cas variés — à mesurer en S2 du parcours C.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Les quatre questions de §1.2.

*Exercice : Prends un article de presse scientifique grand public récent. Annote-le avec la grille.
Note les passages que vous ne pouvez pas classer.*

Chapitre 2 — Carte détaillée des statuts épistémiques

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 2 Compétence visée — Maîtriser les six statuts en sachant donner pour chacun un exemple personnel issu de votre propre formation. Idée-clé — Une mesure répétée et concordante ne devient pas un théorème par accumulation. Erreur typique — Confondre [P] et [E] — croire qu'une mesure stable est une preuve. Geste scientifique attendu — Pour chaque statut, sois capable de donner un exemple tiré des sciences ou de l'informatique. Question finale — Si je vous dites « cette mesure se reproduit à dix reprises », est-ce [P] ou [E] ? Pourquoi ?

Figure Q1 — Protocole de typage d'une affirmation



Lecture attendue pour Quentin : ne jamais monter de statut sans preuve ou sans nommer l'hypothèse.

Figure Q1 — Protocole de typage d'une affirmation. Flux de décision en cinq gestes : phrase lue → statut → hypothèse → mesure / preuve → action. C'est le geste central que vous devez apprendre à exécuter mécaniquement devant n'importe quel énoncé.

2.1 [P] Prouvé — la rigueur démontrée

Une affirmation [P] est appuyée par au moins l'un des trois :

- Une démonstration en théorème publié, avec référence vérifiable.
- Une preuve formelle en Lean 4 qui compile sans sorry.
- Un calcul direct vérifiable mécaniquement (par exemple decide sur une structure finie).

Exemple typique du programme

```
theorem card_G30 : Fintype.card G30 = 8 := by decide
```

Ce théorème dit que le groupe des inversibles modulo 30 a 8 éléments. Lean l'établit par énumération. Vérifiable mécaniquement. C'est [P] au sens le plus strict.

Exemple de votre formation

Le théorème de Pythagore dans un espace euclidien : $a^2 + b^2 = c^2$ pour un triangle rectangle. Démontré depuis l'antiquité. C'est [P] sans condition.

2.2 [P|H] Prouvé sous hypothèse — la rigueur conditionnelle

Une affirmation [P|H] est un théorème **démontré** mais **sous une hypothèse explicite H**. L'hypothèse peut être :

- une hypothèse mathématique (RH, GUE, T1...)
- une hypothèse empirique (isotropie, indépendance...)
- une hypothèse de version d'outil (mathlib4 v4.29...)

Exemple central du programme

[P|isotropie] : sur Δ^7 supposé isotrope, $\lambda = 1/\sqrt{k-1}$. Théorème démontré. Mais l'audit M56 (mars 2026) a réfuté empiriquement l'isotropie sur G_{30} . Le théorème reste mathématiquement vrai ; mais on ne peut pas le citer comme « λ est universel ».

La distinction est subtile mais crucial : le théorème **ne devient pas faux** parce que son hypothèse est réfutée empiriquement dans un contexte particulier. Il reste un théorème géométrique parfaitement valide. Ce qui change, c'est sa **portée d'application**. On ne peut plus s'en servir comme d'un argument universel ; on doit en spécifier le contexte.

Exemple de votre formation

« Sous l'hypothèse que les particules sont en équilibre thermique, l'énergie moyenne par degré de liberté est $kT/2$ (équipartition). » C'est [P|équilibre]. Si le système est hors équilibre, le théorème reste vrai mais ne s'applique pas — exactement comme λ post-M56.

2.3 [E] Empirique — la mesure répétée

Une affirmation [E] est appuyée par une mesure pipelinée qui satisfait les quatre conditions de R1 :

- **Méthode** : script informatique avec version.
- **Précision** : nombre de décimales documenté.
- **Plage** : intervalle de confiance ou borne d'erreur.
- **Reproductibilité** : autre exécution, même résultat.

Exemple typique

$\hat{\lambda}_{TDA} \approx 0,3781 \pm 0,0014$ sur 350 zéros de ζ entre les hauteurs $T = 10^5$ et $T = 10^6$, mesuré par persistance topologique H_1 , p -value Kolmogorov-Smirnov $\approx 0,73$.

C'est [E]. Pas [P]. Une mesure répétée à dix reprises ne devient pas un théorème. C'est probablement la confusion la plus fréquente — et la plus coûteuse — dans toute la science empirique : croire que la stabilité numérique d'une mesure suffit à la transformer en démonstration.

Pourquoi cela compte — En réseau, vous mesurez une latence à 0,5 ms, reproduite cent fois. C'est [E]. Cela ne dit rien sur la latence dans des conditions différentes (charge, jitter, autre datacenter). Vous n'as pas un théorème ; vous avez une régularité observée dans un contexte précis. Le déploiement en production exige de spécifier le contexte.

2.4 [C] Conjectural — la formulation falsifiable

Une affirmation [C] satisfait deux conditions :

- Elle est formulée explicitement (pas implicite, pas allusive).

- Elle est falsifiable : on peut imaginer un test qui, s'il échoue, la réfute.

Exemple du programme

Conjecture Q3 : pour q parcourant les modules primoriels $\{30, 210, 2310, 30030\dots\}$, $V_{\text{eff}}^{\{det_2\}}(q, 1/2) \sim c \cdot \kappa(q)^2$ avec c constante universelle et $\kappa(q) \sim q^{+0,337} \approx q^{1/3}$ (régression empirique $[N]$ sur sept niveaux $q_1=2$ à $q_7=510\,510$, $R^2 = 0,96$, exposant non statistiquement distinguable de $1/3$, rupture documentée à q_8).

Cette conjecture donne un test : mesurer V_{eff} sur la tour primorielle et voir si la prédiction tient. Si elle ne tient pas, la conjecture tombe. C'est l'esprit Popper : un énoncé qui ne peut pas être réfuté n'est pas une conjecture scientifique.

Contre-exemple classique

« Tout phénomène a une cause profonde. » Affirmation infalsifiable : quel qu'en soit le phénomène, on peut toujours postuler une cause. Ce n'est pas une conjecture scientifique au sens [C].

2.5 [T] Cible théorème — l'énoncé en attente

Une affirmation [T] est un théorème **non encore démontré**, mais dont l'énoncé est posé proprement : objets identifiés, conclusion à atteindre, obstacles techniques connus (« verrous »).

Exemples du programme

- **T0.** $\lambda_{\text{simplex}} = \lambda_{\text{TDA}}$. Verrou : identifier le foncteur de transport.
- **T1.** Existence de la limite de persistance pour le DPP sine. Trois sous-verrous : tension W_2 , continuité loi $\rightarrow$ diagramme, concentration uniforme.
- **T2, T3, T4.** Énoncés posés, statut [T].

La distinction [C] / [T] est fine mais utile. Une **conjecture** est typiquement formulée par une équipe extérieure ou émerge du programme ; une **cible théorème** est un objectif technique du programme avec un plan d'attaque.

2.6 [O] Ouvert — l'horizon non encore formé

Une affirmation [O] est un constat ou une intuition pour laquelle on n'a **pas encore d'énoncé propre**. On voit qu'il y a quelque chose, mais on ne sait pas formaliser.

Exemple central

Mur H3 : la statistique $\langle r \rangle$ des espacements entre zéros voisins de ζ vaut empiriquement 0,62, alors que la prédiction GUE attendue est plus basse. Pourquoi cette déviation ? Aucun énoncé formel actuel ne la capture.

Le mur H3 est [O]. Il n'est ni [E] (parce qu'il y a au moins une mesure stable) ni [C] (parce qu'on n'a pas encore d'énoncé falsifiable qui en explique l'origine). C'est un **trou dans la théorie** qu'on a appris à nommer.

2.7 La règle d'or

Quand vous doutez du statut, prenez le plus prudent. Une affirmation tagged $[P]$ qui devrait être $[P|H]$ est une faute. Une affirmation $[P|H]$ qui aurait pu être $[P]$ est juste de la sobriété excessive. La sobriété excessive est récupérable ; la prétention prouvée fausse, non.

✓ Ce que je peux dire — Une mesure stable et reproductible est [E] — une bonne mesure, mais pas une preuve. ✗ Ce que je ne peux pas dire — Une mesure répétée devient un théorème par accumulation. → Bonne formulation — Une mesure [E] motive [C] et soutient [T]. Pour devenir [P], il faut une démonstration. Cette frontière est non-négociable.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Les définitions des six statuts sont des conventions stables et cohérentes.
- **[E] Ce qui est empirique** : L'usage des six statuts dans le programme est documenté et appliqué.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture sur les définitions.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Y a-t-il un septième statut manquant ?
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Les définitions précises des six tags, et un exemple concret pour chacun.

Exercice : Pour chaque tag, écris en deux lignes un exemple tiré de votre formation (physique, maths, informatique). Plus difficile qu'il n'y paraît.

Chapitre 3 — Origine historique : Bernard Couret et les cahiers

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 3 Compétence visée — Reconnaître la différence entre observation empirique et démonstration formelle. Idée-clé — Une bonne intuition empirique sur la bonne structure n'est pas une preuve, mais elle peut indiquer où la preuve devra venir. Erreur typique — Attribuer à Bernard ce qu'il n'a pas démontré, par pitié familiale ou par effet narratif. Geste scientifique attendu — Distinguer ce que Bernard a observé (empiriquement) et ce qui a été démontré ensuite (formellement). Question finale — Si Bernard avait observé que $TC = \{1, 11, 29\}$, l'avait-il démontré ?

3.1 Qui était Bernard

Bernard Couret (1928–1999) était un chercheur autodidacte. Il a vécu toute sa vie à Istres, en Provence. Il n'était pas mathématicien de profession. Il était **autodidacte** — il a appris seul, sans cursus académique, par lecture et par travail.

Pendant plusieurs décennies, il a rempli des cahiers d'observations sur la **distribution des nombres premiers modulo 30** — c'est-à-dire sur les restes que donnent les nombres premiers quand on les divise par 30. Il travaillait à la main, sans ordinateur, sans accès à la littérature internationale, probablement sans savoir que certaines de ses observations avaient déjà des noms dans d'autres traditions.

Cette précision compte : Bernard ne s'inscrivait pas dans une école. Il observait. Et il observait avec patience, sur des décennies. Cette patience est une qualité scientifique sous-estimée — particulièrement à l'âge où les outils accélèrent tout.

3.2 Ce qu'il a vu

Quand on regarde les premiers supérieurs à 5, ils tombent tous dans l'une de huit classes modulo 30 : $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Fait élémentaire d'arithmétique : si $p > 5$ est premier, p n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 — donc son reste mod 30 ne peut pas être pair, ni multiple de 3, ni multiple de 5. Il reste 8 possibilités.

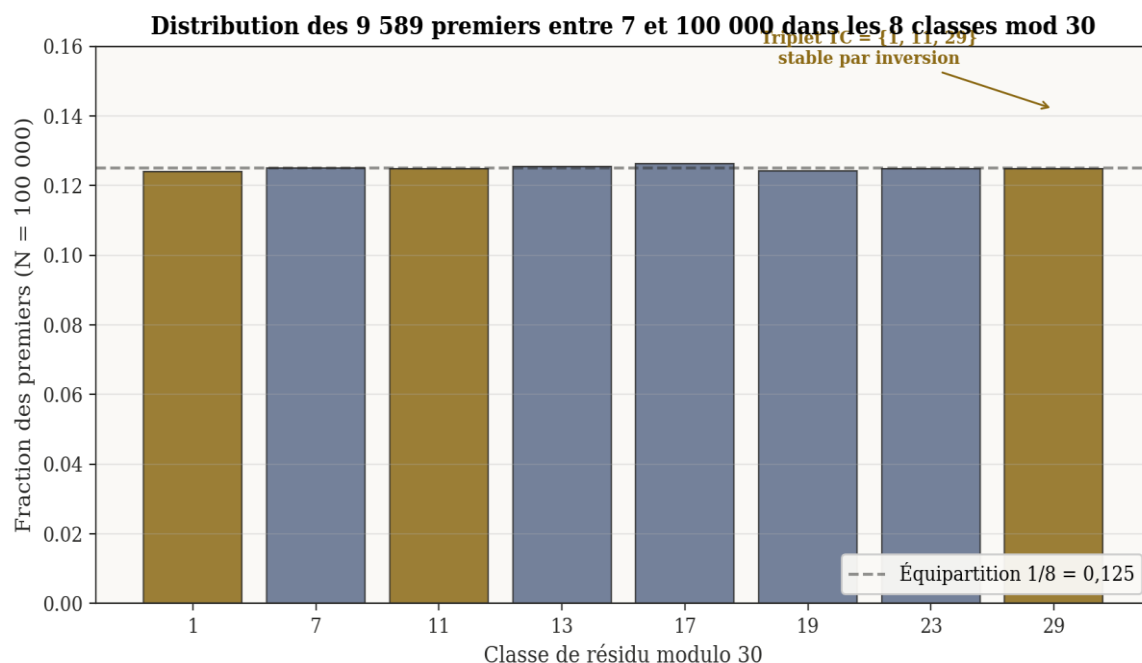


Figure 3 — Distribution des premiers entre 7 et 100 000 dans les 8 classes mod 30. La distribution est asymptotiquement uniforme (Dirichlet), avec des fluctuations finies. Les classes $\{1, 11, 29\}$ (en doré) forment le triplet de Couret TC.

Bernard avait remarqué qu'à l'intérieur de ces huit classes, certains triplets se comportent de manière spéciale. En particulier le triplet

$$TC = \{1, 11, 29\}$$

qui a deux propriétés :

1. Chaque élément est son propre inverse multiplicatif modulo 30 : $1^2 \equiv 1$, $11^2 \equiv 121 \equiv 1$, $29^2 \equiv 841 \equiv 1 \pmod{30}$.
2. L'ensemble n'est **pas** stable par produit : $11 \times 29 = 319 \equiv 19 \pmod{30}$ — la classe 19 « apparaît » sans être dans TC.

Cette non-fermeture — la classe « fantôme » 19 surgissant du produit 11×29 — est le germe combinatoire du programme entier.

Classes mod 30, triplet TC et classe fantôme 19

Le noyau discret de départ du programme Couret–Unification

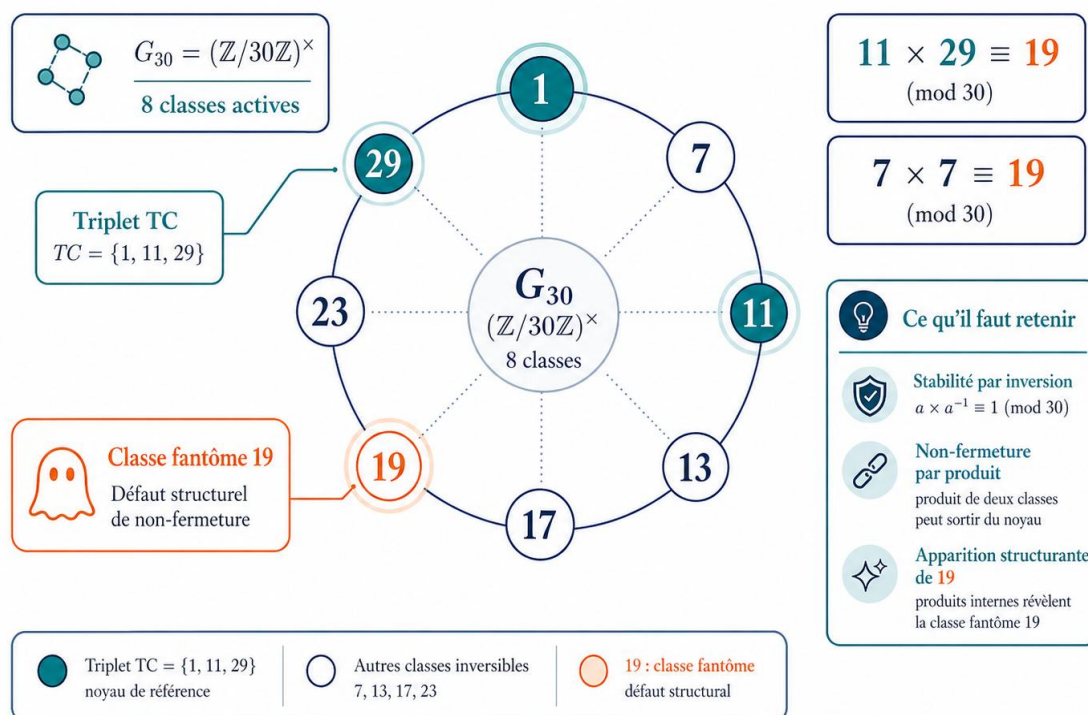


Figure 4 — Classes mod 30, triplet TC et classe 19. Les huit classes coprimales avec 30 forment $G_{30} = (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$, isomorphe à $C_2 \times C_4$. Le triplet $TC = \{1, 11, 29\}$ (en teal) est stable par inversion mais pas par produit : $11 \times 29 \equiv 19$ et $7 \times 7 \equiv 19 \pmod{30}$. La doctrine v38 reformule cette propriété : $TC = K_4 \setminus \{19\}$ où $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ est le sous-groupe de Klein V_4 dans G_{30} ; 19 est l'élément EFFACÉ du Klein, pas un défaut structural. Voir Annexe F.3 et figure F.1 pour la table de Cayley K_4 complète.

3.3 Ce que cela permet aujourd'hui

Quarante ans après les cahiers, on peut formaliser ce que Bernard avait observé empiriquement, et aller beaucoup plus loin :

- On démontre que $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à $C_2 \times C_4$. [P]
- On démontre en Lean 4 que TC est stable par inversion mais pas par produit. [P]
- On démontre que le graphe de Cayley engendré par TC sur G_{30} a un spectre exact : $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$. [P]

- On démontre l'orthogonalité des 8 caractères de Dirichlet. [P]

Bernard ne disposait d'aucun de ces outils. Il avait une intuition empirique de la **bonne structure** — celle qui permettrait à des outils ultérieurs (théorie des groupes, théorie des graphes spectraux, théorie des caractères) de produire des théorèmes solides.

3.4 Pourquoi Bernard apparaît dans ce dossier

Pour une raison strictement scientifique : les cahiers de Bernard sont l'origine historique du matériau arithmétique sur lequel le programme travaille. Ce serait malhonnête de présenter le programme sans dire d'où viennent les premières observations.

Pour le reste : **pas de mythologie**. Pas de mission. Pas d'héritage symbolique. Bernard a fait ce qu'il aimait, il en a tiré ce qu'il en a tiré, il n'a pas demandé qu'on prolonge. Le programme actuel **hérite** d'un matériau arithmétique — c'est un fait, pas une dette.

3.5 Discipline d'humilité

Bernard n'a pas démontré l'hypothèse de Riemann. Il n'a pas découvert $\lambda = 1/\sqrt{7}$. Il n'avait pas le langage pour formuler ce qu'il voyait. Mais il avait mis la main sur la bonne structure : le triplet TC, la « classe fantôme » 19, la non-fermeture combinatoire. Ces objets ont une formulation propre aujourd'hui ; cela n'enlève rien à l'observation initiale, et cela n'autorise pas à attribuer à Bernard ce qu'il n'a pas démontré.

✓ Ce que je peux dire — Bernard a observé empiriquement la non-fermeture de TC dans ses cahiers manuscrits. ✗ Ce que je ne peux pas dire — Bernard a démontré la structure de groupe de G_{30} ou les propriétés de TC. → Bonne formulation — Bernard a empiriquement identifié la bonne structure ; la démonstration formelle est ultérieure et utilise des outils qu'il n'avait pas.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Les huit classes premières mod 30 et la non-fermeture de TC = {1, 11, 29} sont des faits arithmétiques élémentaires démontrables.
- **[E] Ce qui est empirique** : Bernard a observé empiriquement la stabilité par inversion et la non-stabilité par produit.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture rattachée à Bernard.
- **[O] Ce qui est ouvert** : L'évaluation rigoureuse de ce que les cahiers contiennent exactement.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : L'origine historique du matériau, et la distinction entre observation et démonstration.

Exercice : Calcule à la main les restes mod 30 des 30 premiers nombres premiers à partir de 7. Vérifie qu'ils tombent dans les 8 classes annoncées.

Chapitre 4 — M56 : comment une idée forte est reclassée

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 4 Compétence visée — Comprendre comment un test directionnel peut faire basculer le statut épistémique d'une affirmation forte sans drame. Idée-clé — Quand une intuition forte traverse plusieurs domaines, la première discipline est de chercher le test qui pourrait la falsifier. Erreur typique — Présenter une universalité empirique comme une universalité spectrale ou structurelle. Geste scientifique attendu — Tester l'isotropie quand elle est invoquée. Reclassifier sans deuil quand le test échoue. Question finale — Pourquoi le test M56 a-t-il pu réfuter une affirmation qui semblait robuste ?

4.1 Le contexte

Pendant l'automne 2025 et l'hiver 2026, le programme avait accumulé des observations selon lesquelles la constante $\lambda = 1/\sqrt{7} \approx 0,3780$ apparaissait dans plusieurs domaines :

- géométrie de Fisher–Rao sur le simplexe Δ^7 ;
- persistance topologique sur les zéros de ζ ;
- raréfaction sur les classes premières mod 30 ;
- paramètres de Sophie Germain.

λ après l'audit M56

Invariant géométrique conditionnel, mesure empirique et dépromotion de l'universalité

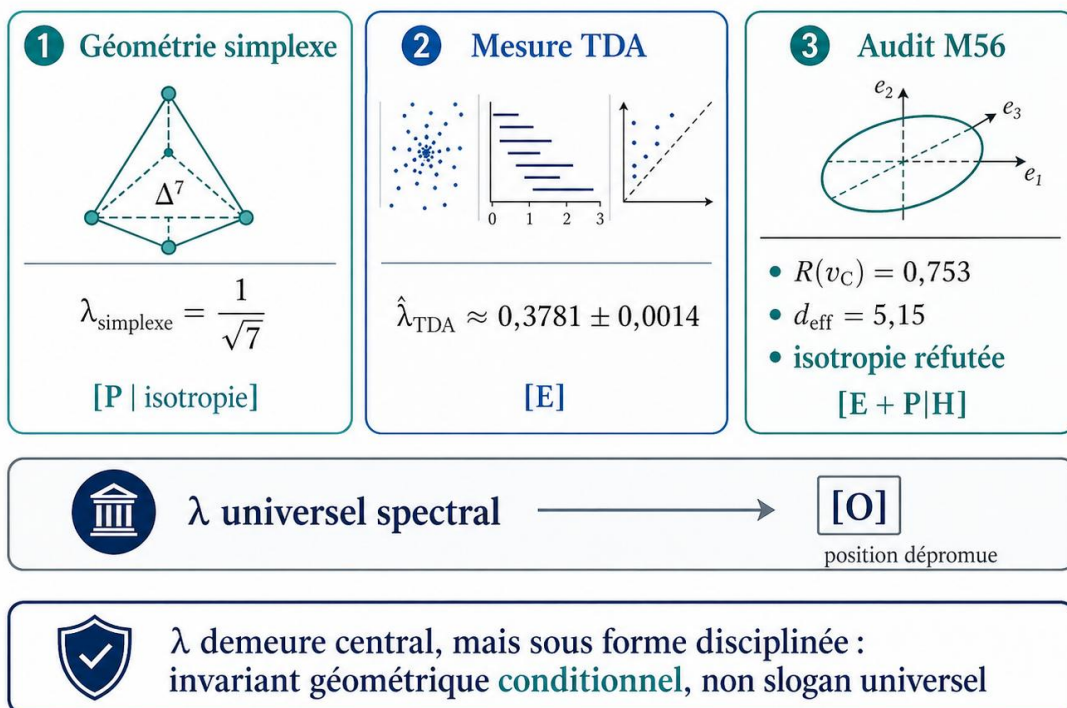


Figure 5 — λ après l'audit M56 : invariant géométrique conditionnel, mesure empirique et dépromotion de l'universalité.

Trois colonnes lisent le statut de λ : (1) géométrie du simplexe Δ^7 , $\lambda_{\text{simplexe}} = 1/\sqrt{7}$ sous l'hypothèse d'isotropie [P|isotropie] ; (2) mesure TDA empirique $\hat{\lambda}_{\text{TDA}} \approx 0,3781 \pm 0,0014$ [E] ; (3) audit M56 réfute l'isotropie ($R(v_C) = 0,753$, $d_{\text{eff}} = 5,15$) [E + P|H]. Le bandeau du bas dépromue la position « λ universel spectral » à [O], tout en préservant λ comme invariant géométrique discipliné.

La tentation était grande de qualifier λ de **constante universelle spectrale** — universelle au sens où elle traverserait des familles d'objets différentes. Cette tentation a été matérialisée dans plusieurs documents internes, et même dans une communication antérieure à Cambridge en novembre 2025.

4.2 Le test M56

L'audit M56, conduit en mars 2026, est un **test d'isotropie**. L'idée : *si λ est un invariant spectral universel, alors les fluctuations empiriques sur le simplexe Δ^7 devraient être isotropes — ne privilégier aucune direction*. L'isotropie est testée en comparant un rapport directionnel $R(v)$ à 1, sur 56 directions de triplets — les $C(8,3) = 56$ manières de choisir trois classes parmi huit.

Audit M56 : test directionnel d'isotropie sur G_{30}

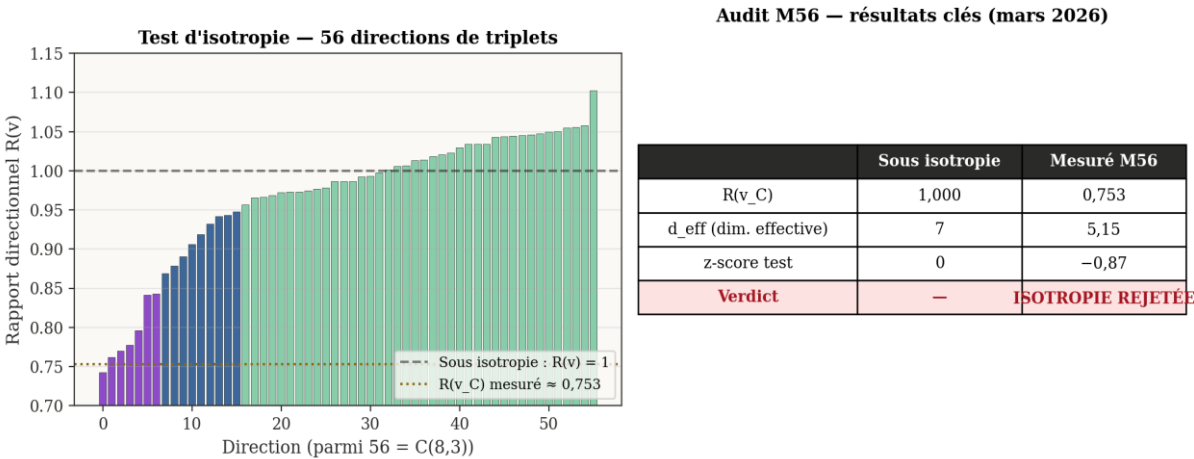


Figure 6 — Audit M56 (mars 2026). À gauche : $R(v)$ pour les 56 directions de triplets, triées. La direction de Couret $v_C = \{1, 11, 29\}$ mesure $R(v_C) \approx 0,753$, très en-dessous de la valeur isotrope 1. À droite : tableau récapitulatif. Verdict : isotropie rejetée.

4.3 Le verdict

L'isotropie est rejetée. Les fluctuations sur Δ^7 ont un rang effectif d'environ 5 au lieu de 7 attendus. Le simplexe n'est pas exploré uniformément — il y a une structure anisotrope sous-jacente.

Trois mesures clés du test :

Quantité	Sous isotropie (théorique)	Mesuré M56	Écart
$R(v_C)$ directionnel	1,000	0,753	-24,7 %
d_eff dimension effective	7	5,15	-1,85
z-score test	0	-0,87	borderline

Tableau 5 — Résultats numériques de l'audit M56.

4.4 Le reclassement avec [P|H]

Avant M56

$\lambda = 1/v_7$ présentée comme invariant spectral universel candidat. Statut [E] avec ambition [P].

Après M56, avec le tag [P|H]

- **[P|isotropie]** : $\lambda_k = 1/\sqrt{k-1}$. Théorème géométrique de Fisher–Rao sous l'hypothèse d'isotropie sur Δ^7 . Démontré. Mais l'hypothèse est empiriquement réfutée sur G_{30} .
- **[E]** : $\hat{\lambda}_{TDA} \approx 0,3781 \pm 0,0014$ sur 350 zéros. Mesure stable, reproductible. Pas un théorème.
- **[O]** : λ comme « invariant universel spectral ». Aucun énoncé formel. Position fermée par M56.

4.5 La triade post-M56

Trois rôles strictement distincts : (1) $\lambda_{\text{simplexe}} = 1/\sqrt{7}$ transporte le signal géométrique entre couches data et TDA. (2) $V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}$ porte le pont local-global dans le cadre Rubinstein–Sarnak. (3) $\det/\xi$ décide HP — c'est l'identité déterminantielle, ouverte.

Mise à jour v38 (cf. Annexe F.5). La triade devient quatuor avec un quatrième rôle : (4) $\text{Tr}(P_- - A^{\{\text{nt}\}} P_-) = -12 \text{ SURVIT}$ à la perturbation Legendre, comme invariant candidat post-tensoriel. C'est l'invariant que le programme a proposé en avril 2026 pour porter la signature locale après que la rigidité $M_3 = M_4 = 7/27$ ait été rétrogradée tensorial-only.

La leçon de M56 n'est pas que λ est faux — elle est que λ a un rôle plus restreint que celui qu'on espérait. Et c'est en clarifiant ce rôle qu'on a libéré de la place pour les deux autres objets de la triade.

Figure Q10 — Quatuor post-M56 : quatre rôles, quatre objets

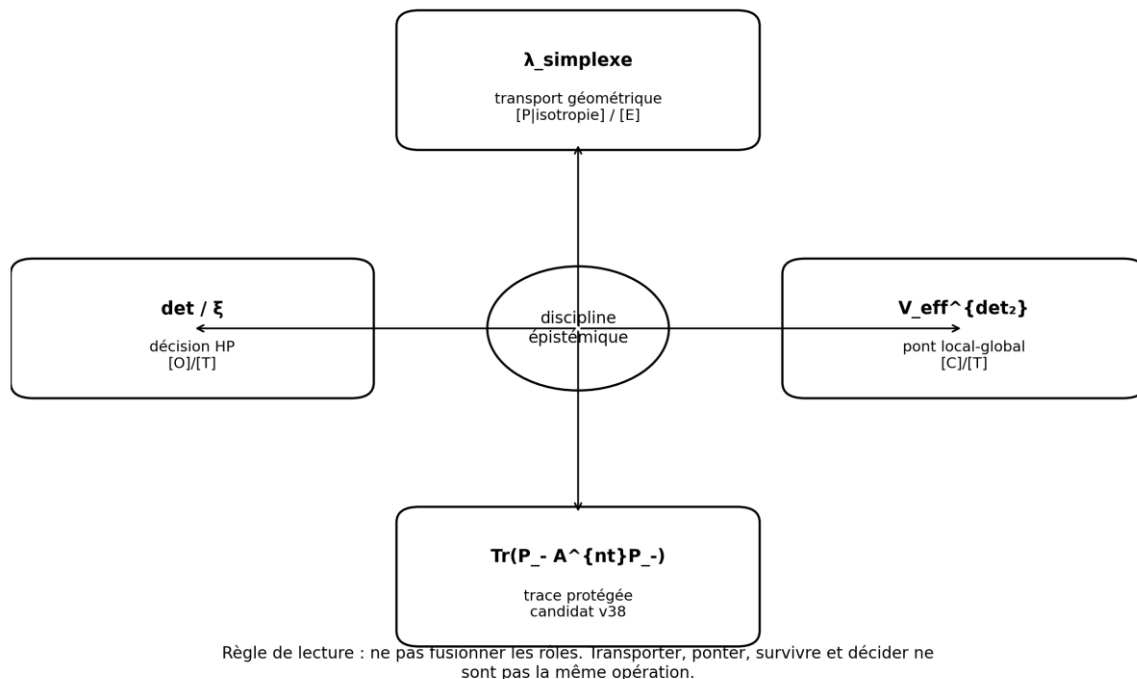


Figure Q10 — Quatuor post-M56 : quatre rôles, quatre objets distincts. Au centre, la discipline épistémique qui les relie sans les fusionner. (1) $\lambda_{\text{simplexe}}$ transporte le signal géométrique. (2) $V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}$ pont le local au global. (3) $\text{Tr}(P_- - A^{\{\text{nt}\}} P_-)$ survit à la perturbation Legendre. (4) $\det/\xi$ décide HP. Quatre opérations, jamais à confondre.

Pourquoi cela compte pour vous — En réseau et sécurité, la même discipline s'applique. Si une métrique semble être « universellement valide », testez-la dans des conditions où elle pourrait échouer. Si vous avez une hypothèse non testée d'« indépendance des paquets » ou d'« uniformité du trafic », vous avez une $[P|H]$ qui se présente comme $[P]$. Le M56 du métier, c'est le test de stress non-corrélé.

✓ Ce que je peux dire — L'audit M56 a réfuté l'isotropie sur G_{30} ($R(v_C) = 0,753$, $d_{\text{eff}} = 5,15$, $z\text{-score} = -0,87$). ✗ Ce que je ne peux pas dire — λ est un invariant spectral universel. → Bonne formulation — $\lambda = 1/v_7$ est un invariant géométrique exact de Δ^7 sous isotropie. Sur G_{30} , l'isotropie est empiriquement réfutée. λ reste invariant de transport entre couches, pas universalité spectrale.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Le théorème géométrique conditionnel sous isotropie reste $[P| \text{isotropie}]$.
- **[E] Ce qui est empirique** : $R(v_C) = 0,753$, $d_{\text{eff}} = 5,15$, $z\text{-score} = -0,87$ sur 56 directions, mars 2026, reproductible.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture dans ce chapitre — c'est un reclassement.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Quelle est la structure anisotrope sous-jacente ? L'audit révèle son existence sans la caractériser.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Comment le test d'isotropie a permis de reclasser λ , et la nouvelle position de λ dans la triade post-M56.

Exercice : Si je vous disais qu'une constante c apparaît à 0,01 près dans cinq domaines distincts, quelle serait la première chose à faire ?

Chapitre 5 — Incident σ_G^* : le faux positif vivant

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 5 Compétence visée — Reconnaître les trois ingrédients d'une fausse identification : coïncidence à basse précision, consensus IA amplificateur, narratif structurel rétroactif. Idée-clé — Une ressemblance à 4 décimales avec une constante canonique n'est jamais une preuve d'identité. Erreur typique — 0,3142 ressemble à $\pi/10$, donc c'est $\pi/10$. Geste scientifique attendu — Refaire le calcul à précision arbitraire (mpmath dps=50) avant de conclure. Question finale — Qu'est-ce qui tranche : le consensus IA, ou le test arbitraire-précision ?

5.1 Le contexte (avril 2026)

Le 20 avril 2026, un épisode très instructif s'est produit, que j'appelle l'incident σ_G^* . Il illustre exactement comment les agents IA peuvent renforcer mutuellement une fausse identification, et comment seul un test à haute précision tranche.

C'est un cas-école parfait. Vous allez le traverser non pas comme un échec — mais comme la **démonstration en direct** que les huit règles fonctionnent. Sans elles, l'erreur aurait pu se propager. Avec elles, elle a été cassée en quelques heures et nommée comme cas-école.

5.2 La séduction : $\pi/10$

La valeur 0,3142 ressemble immédiatement à $\pi/10 = 0,31415926535\dots$ Coïncidence à 4 décimales.

Et un argument structurel s'est même formé : $\pi/10$ apparaîtrait naturellement dans la symétrie d'un paquet log-gaussien centré sur $\gamma_1 \cdot \log(p)$, pour la structure de canaux $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Plausible à première vue. Le narratif structurel renforçait la coïncidence numérique.

Les trois IA — Claude, GPT, Gemini — ont toutes trouvé l'identification « plausible ». Aucune n'a contesté. C'est la **circularité InterIA** : trois agents convergent par approbation mutuelle sans qu'aucun ait les moyens de vérifier indépendamment.

5.3 Le crash haute précision

Test à mpmath dps=50, N=80 zéros de ζ . Quatre critères candidats sont testés en parallèle :

Critère	Si $\sigma_G^* = \pi/10$	Mesuré (dps=50)
Balance Guinand–Weil	Changement de signe à $\pi/10$	Monotone négative sur $[0,15 ; 0,55]$
$\text{Re}[\Phi_2(1/2 + i\gamma_1)] = 0$	Zéro à $\pi/10 = 0,3142\dots$	Zéros à 0,165 — 0,494 — 0,829
$\arg[\Phi_2(1/2 + i\gamma_1)] = \pi/2$	Alignement à $\pi/10$	0,527 (gap 1,04 rad)
$\sigma^2 \cdot \gamma_1 = 4\pi/9$	$\sigma = \pi/10 = 0,3142$	$\sigma^2 \gamma_1 = 1,395$ vs $4\pi/9 = 1,396$ — équiv. à 4 dec.

Tableau 6 — Quatre critères candidats pour $\sigma_G^* = \pi/10$. Aucun ne converge à haute précision.

Incident σ_{G^*} (20 avril 2026) — quatre critères mpmath dps=50, 80 zéros de ζ

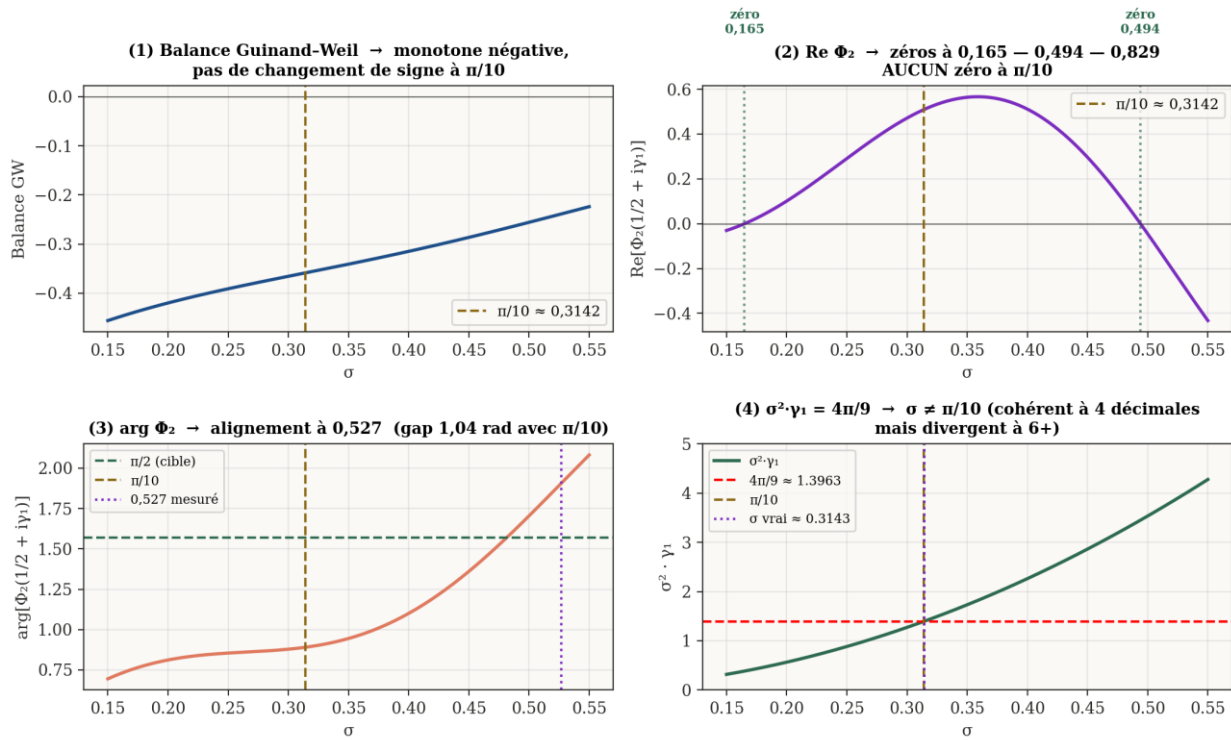


Figure 7 — Les quatre critères mesurés à mpmath dps=50 sur 80 zéros de ζ . La ligne dorée verticale indique $\pi/10 \approx 0,3142$. Aucun critère ne valide l'identification $\sigma_{G^*} = \pi/10$. Le critère (4) semble valider à 4 décimales, mais $\sigma \text{ vrai} \approx 0,3143 \neq \pi/10$.

5.4 Le verdict

Aucun des quatre critères ne converge vers $\pi/10$ à haute précision. Le scan Python initial avait un pas $\Delta\sigma \approx 0,001$ — l'intervalle de largeur 10^{-3} autour de 0,3142 contient $\pi/10$ par chance. La coïncidence à 4 décimales est un artefact d'arrondi float64.

5.5 La dépromotion propre (R8)

La trajectoire complète de σ_{G^*} après l'incident illustre exactement ce que la règle R8 codifie :

R8 — dépromotion propre

Le cas-école σ_G^* comme mémoire scientifique vivante

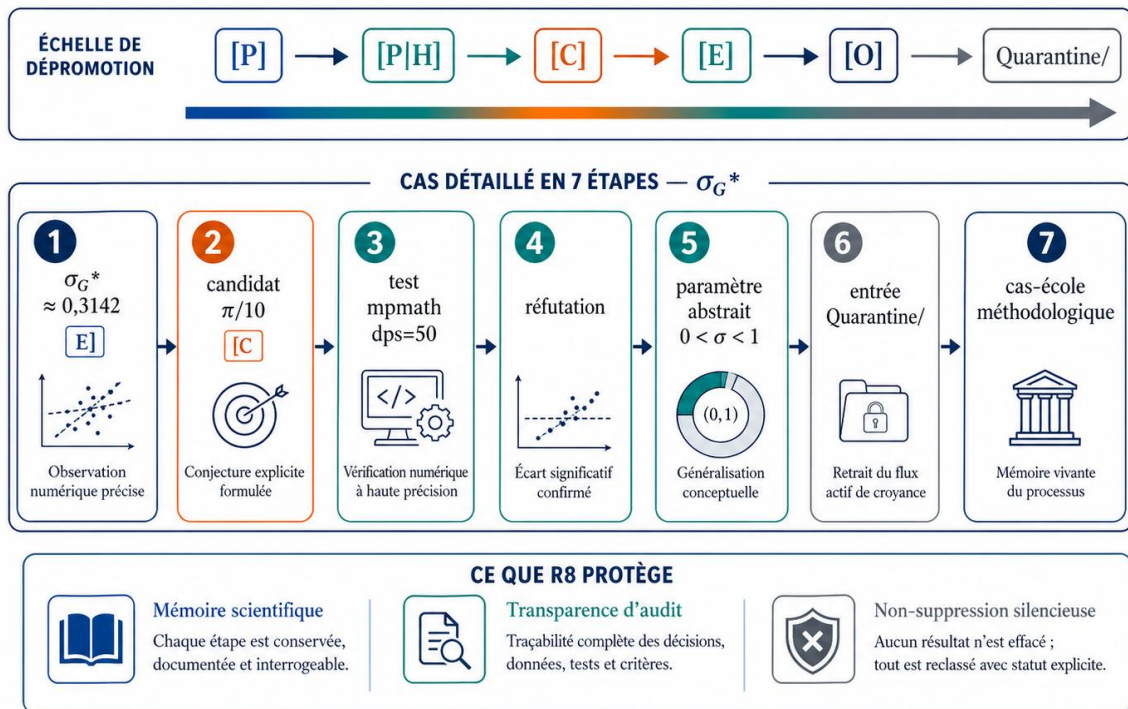


Figure 8 — R8 — dépromotion propre : le cas-école σ_G^* comme mémoire scientifique vivante. En haut, l'échelle de dépromotion $[P] \rightarrow [P|H] \rightarrow [C] \rightarrow [E] \rightarrow [O] \rightarrow \text{Quarantine/}$. Au milieu, le cas σ_G^* détaillé en sept étapes : observation numérique précise $[E] \rightarrow$ conjecture explicite $[C] \rightarrow$ vérification mpmath $\text{dps}=50 \rightarrow$ réfutation $\rightarrow$ paramètre abstrait $\rightarrow$ entrée Quarantine/ $\rightarrow$ cas-école méthodologique. En bas, ce que R8 protège : mémoire scientifique, transparence d'audit, non-suppression silencieuse.

Trajectoire de σ_G^* après l'incident :

etape 1 : $\sigma_G^* \sim 0,3142$	tag [E] mesure
etape 2 : $\sigma_G^* = \pi/10$ candidat	tag [C] conjecture falsifiable
etape 3 : test mpmath $\text{dps}=50$	R3 + R5 refutation
etape 4 : $\sigma_G^* = \pi/10$	tag [O] ouvert / rejete
etape 5 : σ_G^* existe comme parametre	axiom $0 < x < 1$
etape 6 : entree Quarantine/	'avril 2026 false positive'
etape 7 : Norwich talk	'c\'est le programme qui marche'

Rien n'a été effacé. Tout a été nommé et déclassé.

5.6 Le correctif Lean

```
-- v35.0 (à supprimer)
noncomputable def sigma_G_critical : R := 0.3142

-- v35.1 (correct, R5 applique)
axiom sigma_G_critical : R
axiom sigma_G_critical_pos : 0 < sigma_G_critical
axiom sigma_G_critical_lt_one : sigma_G_critical < 1
```

La règle R5 (paramètres abstraits par défaut) transforme une **valeur figée fragile** (0.3142) en un **paramètre abstrait avec propriétés qualitatives** (positif, inférieur à 1). Le code reste utilisable, mais ne ment plus.

5.7 Pourquoi vous devez retenir cet épisode

Trois IA puissantes ont convergé sur une fausse identification. Aucune n'a caché l'erreur — toutes ont approuvé. Le filet de sécurité n'a pas été l'IA. C'était mpmath dps=50 — un outil simple, déterministe, vérifiable. La discipline humaine n'est pas obsolète à l'ère des IA. Elle est le dernier rempart.

Pourquoi cela compte pour vous — Le jour où trois IA vous aideront à diagnostiquer une panne réseau et vous suggéreront « c'est probablement une congestion BGP », demande : « confirmé par traceroute, AS-PATH analysis, et capture pcap ? ». Si ce n'est confirmé que par consensus IA, vous n'as pas un diagnostic — vous avez une plausibilité InterIA. Ce n'est pas pareil. Le mpmath du métier réseau, c'est l'outil de mesure déterministe (Wireshark, dig, traceroute).

✓ Ce que je peux dire — L'incident σ_G^* a été détecté par un test à mpmath dps=50 contre quatre critères indépendants, le 20 avril 2026. ✗ Ce que je ne peux pas dire — Les IA ont détecté l'erreur $\sigma_G^* = \pi/10$. → Bonne formulation — Les IA ont au contraire accepté l'identification. Ce sont les outils déterministes (mpmath) et la discipline humaine (R3) qui ont tranché.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Le test mpmath dps=50 est rigoureux. Les règles R1-R8 sont des conventions, pas des théorèmes.
- **[E] Ce qui est empirique** : Les quatre critères mesurés à mpmath dps=50, 20 avril 2026, reproductibles.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture dans ce chapitre — cas négatif documenté.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Quelle est la valeur exacte de σ_G^* ? On ne le sait pas. Elle reste un paramètre abstrait.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Le récit de l'incident, le rôle de mpmath, et les leçons R1-R8 qui en découlent.

Exercice : Si vous rencontrez demain un pipeline qui produit 1,4142 et qu'un collègue dit « ah, c'est sûrement $\sqrt{2}$ », que fais-vous avant de le croire ?

Chapitre 6 — Le noyau fini : ce qui est solide

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 6 Compétence visée — Identifier la zone du programme la plus stable et savoir l'expliquer en quelques objets clés. Idée-clé — Le noyau fini est entièrement [P]. C'est le socle sur lequel tout repose. Erreur typique — Croire que le noyau fini suffit à prouver l'horizon HP global. Geste scientifique attendu — Distinguer ce qui est démontré dans le noyau fini de ce qui dépend de cibles ou conjectures. Question finale — Quelle est la propriété la plus surprenante du triplet TC, et comment est-elle démontrée ?

6.1 G_{30} , la structure

Noyau spectral fini : de G_{30} à l'espace centré H .

Chaîne finie stabilisée du programme Couret–Unification

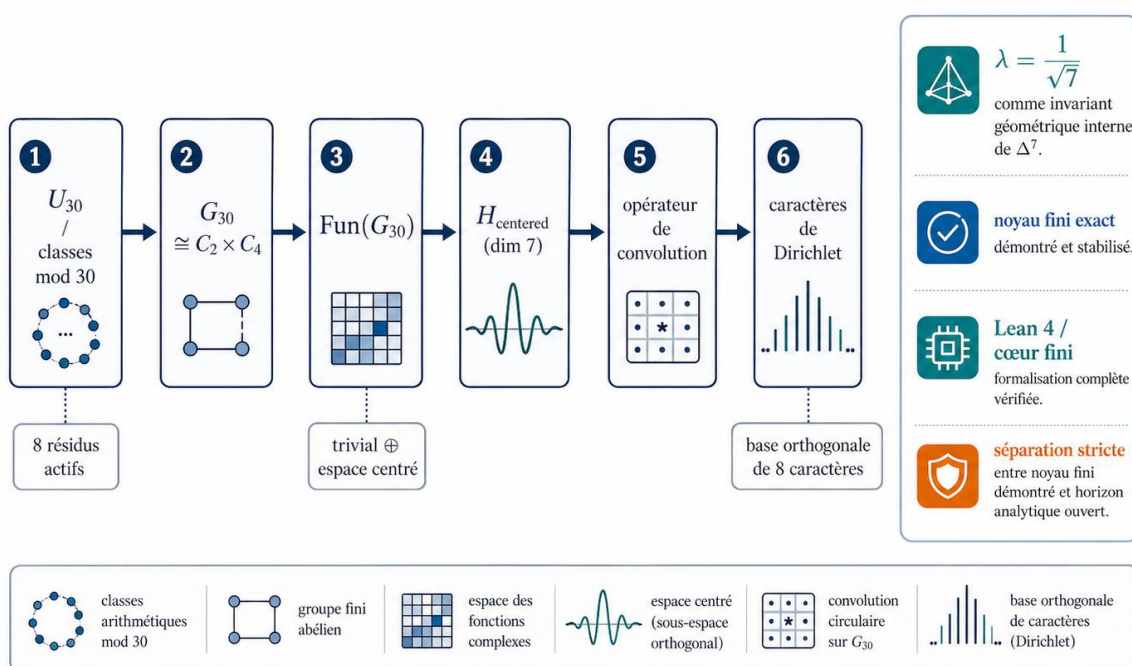


Figure intro 6 — Noyau spectral fini : de G_{30} à l'espace centré H . Chaîne en six étapes du programme : U_{30} (8 résidus actifs) $\rightarrow G_{30} \cong C_2 \times C_4 \rightarrow \text{Fun}(G_{30}) \rightarrow H_{\text{centered}}$ (dim 7) $\rightarrow$ opérateur de convolution $\rightarrow$ caractères de Dirichlet (base orthogonale de 8 caractères). La chaîne entière est démontrée formellement en Lean 4 et constitue le socle stabilisé du programme. Les quatre encadrés à droite résument : $\lambda = 1/\sqrt{7}$ invariant interne de Δ^7 , noyau fini exact démontré, formalisation Lean 4 complète, séparation stricte avec l'horizon analytique ouvert.

- **Définition.** $G_{30} = (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$, classes de résidus mod 30 premières avec 30.
- **Cardinal.** $|G_{30}| = 8$. [P] par decide.
- **Décomposition.** $G_{30} \cong C_2 \times C_4$ via le théorème des restes chinois (CRT). [P]
- **Représentants.** $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. [P]

Cette première strate est la plus solide : elle ne dépend d'aucune conjecture, d'aucune hypothèse, d'aucun calcul flottant. C'est de l'arithmétique élémentaire, démontrable au tableau noir et formellement vérifiée en Lean 4.

6.2 Le triplet TC

Définition. $TC = \{1, 11, 29\} \subset G_{30}$.

- Stable par inversion : $1^2 \equiv 1, 11^2 \equiv 1, 29^2 \equiv 1 \pmod{30}$. [P]
- Pas un sous-groupe : $11 \times 29 \equiv 19 \pmod{30}$, $19 \notin TC$. [P] par decide.
- Fantôme quadratique : $u_{11} \cdot u_{29} = u_7^2 = u_{19}$. [P]

Cette troisième propriété — la « fantôme quadratique » — est la plus subtile. Elle dit que le produit des deux involutions non-triviales 11 et 29 produit l'élément 19, qui est précisément le carré de 7 dans G_{30} . C'est une **relation algébrique exacte**, pas une coïncidence numérique.

Mise à jour v38 (cf. Annexe F.3). La doctrine v38 reformule cette propriété structurellement : $TC = K_4 \setminus \{19\}$ où $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ est le sous-groupe de Klein V_4 dans G_{30} . La « classe fantôme » 19 est l'élément EFFACÉ du Klein, pas un défaut de fermeture. La table de Cayley K_4 (figure F.1) montre la structure complète. Cette reformulation inscrit le programme dans une tradition algébrique standard, plutôt que de présenter 19 comme un mystère à résoudre. Théorèmes Lean associés : `phantom19_mem_K4`, `TC_eq_K4_erase_19`, `phantom19_is_product_witness` (`PuncturedKlein30.lean`).

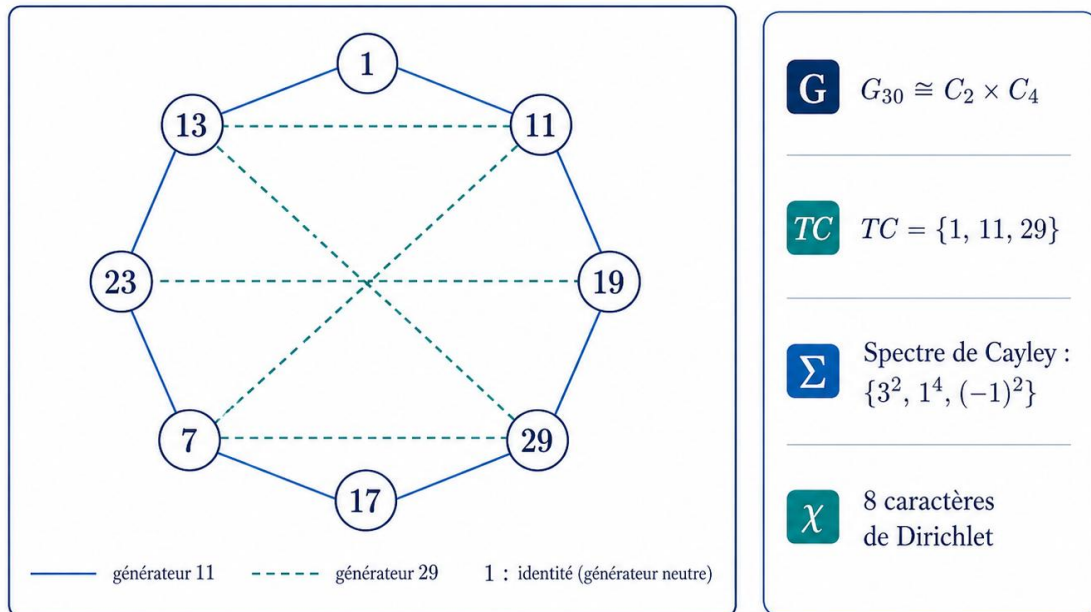
6.3 Le graphe de Cayley

Le graphe $\text{Cay}(G_{30}, TC)$ a pour spectre :

$$\text{Spec}(A_{TC}) = \{3 \text{ (multiplicité 2)}, 1 \text{ (multiplicité 4)}, -1 \text{ (multiplicité 2)}\}$$

Graphe de Cayley de G_{30} engendré par TC

Représentation finie exacte et spectre associé



Structure exacte, vérifiable, compatible avec le noyau Lean 4

Figure 9 — Graphe de Cayley de G_{30} engendré par TC : représentation finie exacte et spectre associé. Les huit classes inversibles $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ sont disposées en octogone. Les arêtes bleues (générateur 11) et vertes pointillées (générateur 29) tracent les voisinages. L'identité (générateur 1) ajoute une boucle invisible à chaque sommet. Le panneau

de droite récapitule : $G_{30} \cong C_2 \times C_4$, $TC = \{1, 11, 29\} = K_4 \setminus \{19\}$ (Klein ponctué — cf. Annexe F.3), spectre $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$, 8 caractères de Dirichlet. Structure exacte, vérifiable, compatible avec le noyau Lean 4.

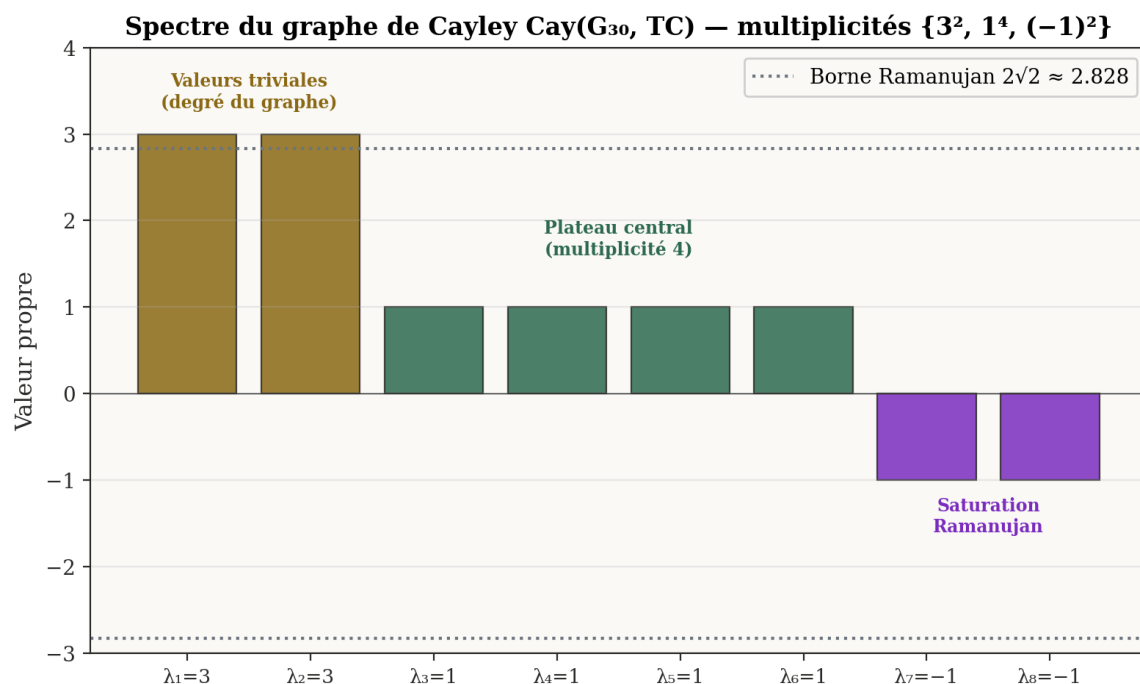


Figure 10 — Spectre du graphe de Cayley $\text{Cay}(G_{30}, TC)$. Multiplicités $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$. La saturation Ramanujan bipartite est atteinte : $|\lambda_{nt}| \leq 2\sqrt{k-1} = 2\sqrt{2} \approx 2,828$. C'est un graphe de Ramanujan optimal pour le degré 3.

- **Saturation Ramanujan bipartite** : $|\lambda_{nt}| \leq 2\sqrt{k-1} = 2$ atteint. [P]
- **Profil spectral du caractéristique de TC** : (9, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1), Parseval = 24. [P]

6.4 Les 8 caractères de Dirichlet

Sur G_{30} , il y a exactement 8 caractères de Dirichlet. Propriétés démontrées via le module Bridge v13 :

- Multiplicativité de chaque caractère. [P]
- Orthogonalité des 8 caractères. [P]
- Cohérence de parité interne / Conrey LMFDB. [P]

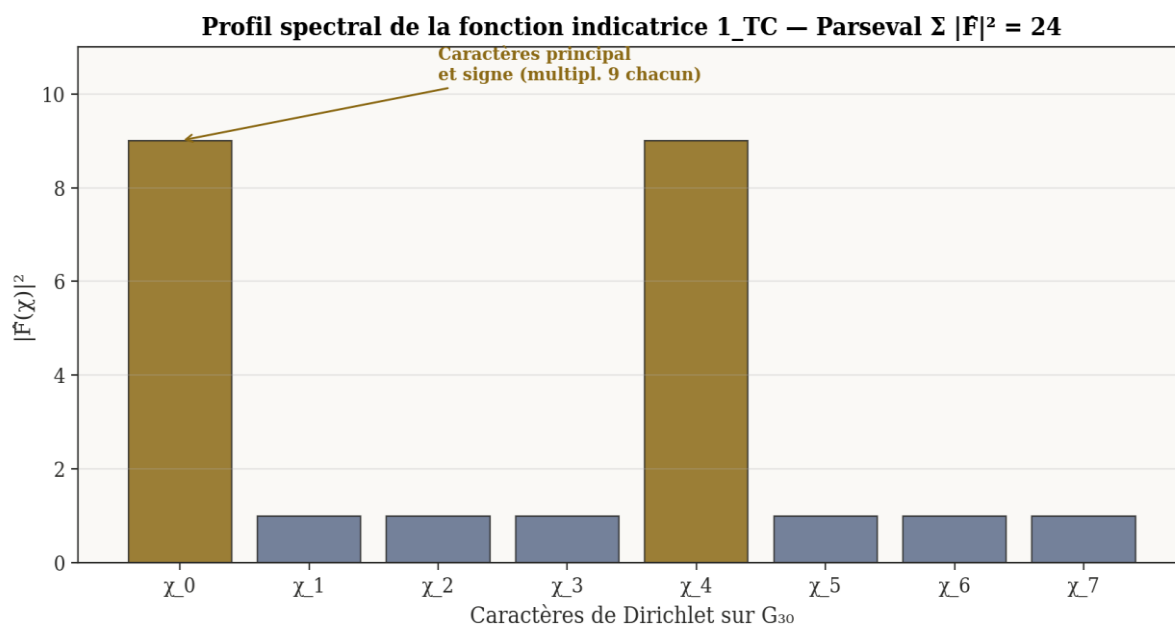


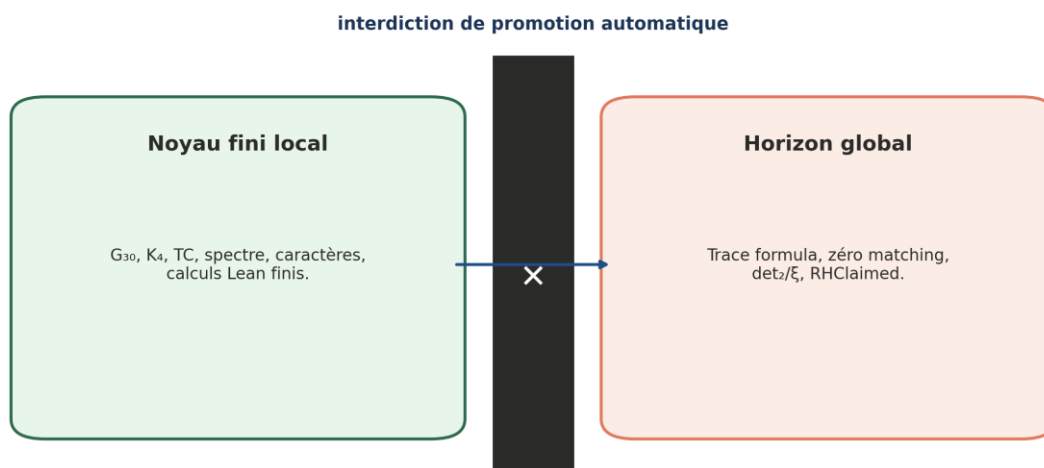
Figure 11 — Profil spectral $|\hat{F}|^2$ de la fonction indicatrice 1_TC sur les 8 caractères de Dirichlet de G_{30} . Le profil (9, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1) reflète exactement la structure de TC. La somme — Parseval — donne $24 = 3 \times 8$, conforme au cardinal de TC fois le cardinal du groupe.

6.5 Décomposition de FunG30

$\text{FunG30} = \text{trivialLine} \oplus H_{\text{centered}}, \dim 1 + 7 = 8.$

Décomposition orthogonale prouvée en Lean. Statut [P]. Cette décomposition est ce qui rend le simplexe Δ^7 « centré sur 7 dimensions » — la dimension manquante (la huitième) est précisément la direction triviale (la moyenne uniforme).

Figure Q4 — Pare-feu local/global



Un résultat fini exact n'autorise pas une conclusion Hilbert-Pólya globale.

Figure Q4 — Pare-feu local/global. Le noyau fini exact (à gauche) ne se promeut pas automatiquement vers l'horizon analytique global (à droite). La barrière centrale est la doctrine R6 mécanisée : aucun résultat de noyau fini, aussi

exact soit-il, n'autorise une conclusion Hilbert–Pólya, et a fortiori RH. C'est exactement ce que les invariants doctrinaux à false verrouillent.

6.6 Bilan

Tout ce qui précède dans ce chapitre est [P]. Démontré en Lean 4, compile sans sorry sur cette partie. C'est le socle dur du programme. Ce qui suit aux chapitres 7-9 est de natures différentes.

Pourquoi cela compte — Le noyau fini joue le rôle d'une « architecture certifiée ». En métier réseau, c'est l'équivalent d'un cœur de routage formellement vérifié (comme CompCert pour les compilateurs, ou les preuves formelles d'algorithmes consensus distribués). Tout ce qui est construit au-dessus hérite de la certification, à condition de ne pas franchir les limites du noyau.

✓ Ce que je peux dire — Le noyau fini sur G_{30} est entièrement formalisé en Lean 4 et démontré, sans sorry sur cette partie. ✗ Ce que je ne peux pas dire — Le noyau fini prouve l'hypothèse de Riemann ou démontre HP. → Bonne formulation — Le noyau fini fournit un socle spectral exact ; le pont vers le global (HP, ζ , ξ) reste [O] et n'est pas couvert par le noyau fini.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : $G_{30} \cong C_2 \times C_4$, $|TC| = 3$ stable par inversion, spectre Cayley $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$, orthogonalité des 8 caractères, décomposition FunG30. Tout en Lean 4.
- **[E] Ce qui est empirique** : Vérification numérique de chaque ligne reproductible.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture dans le noyau fini.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Pas d'ouverture — c'est par définition la zone fermée du programme.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Les six éléments structurels du noyau fini avec leur statut [P].

Exercice : Calcule à la main $11 \times 29 \bmod 30$ et $7 \times 7 \bmod 30$. Vous trouvez quoi ? Comment cela peut-il être ?

Chapitre 7 — T0 à T4 : programme de recherche à long terme

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 7 Compétence visée — Distinguer une cible théorème [T] d'un théorème prouvé [P], et identifier les verrous techniques. Idée-clé — Une cible théorème est un énoncé formulé proprement avec verrous identifiés ; pas un théorème en attente de polish. Erreur typique — Confondre [T] et [P] — croire qu'une cible bien formulée est démontrée. Geste scientifique attendu — Pour chaque cible, identifier quel verrou technique reste à lever. Question finale — Pourquoi T3 n'implique-t-elle pas une preuve de RH ?

7.1 T0 — l'égalité de transport

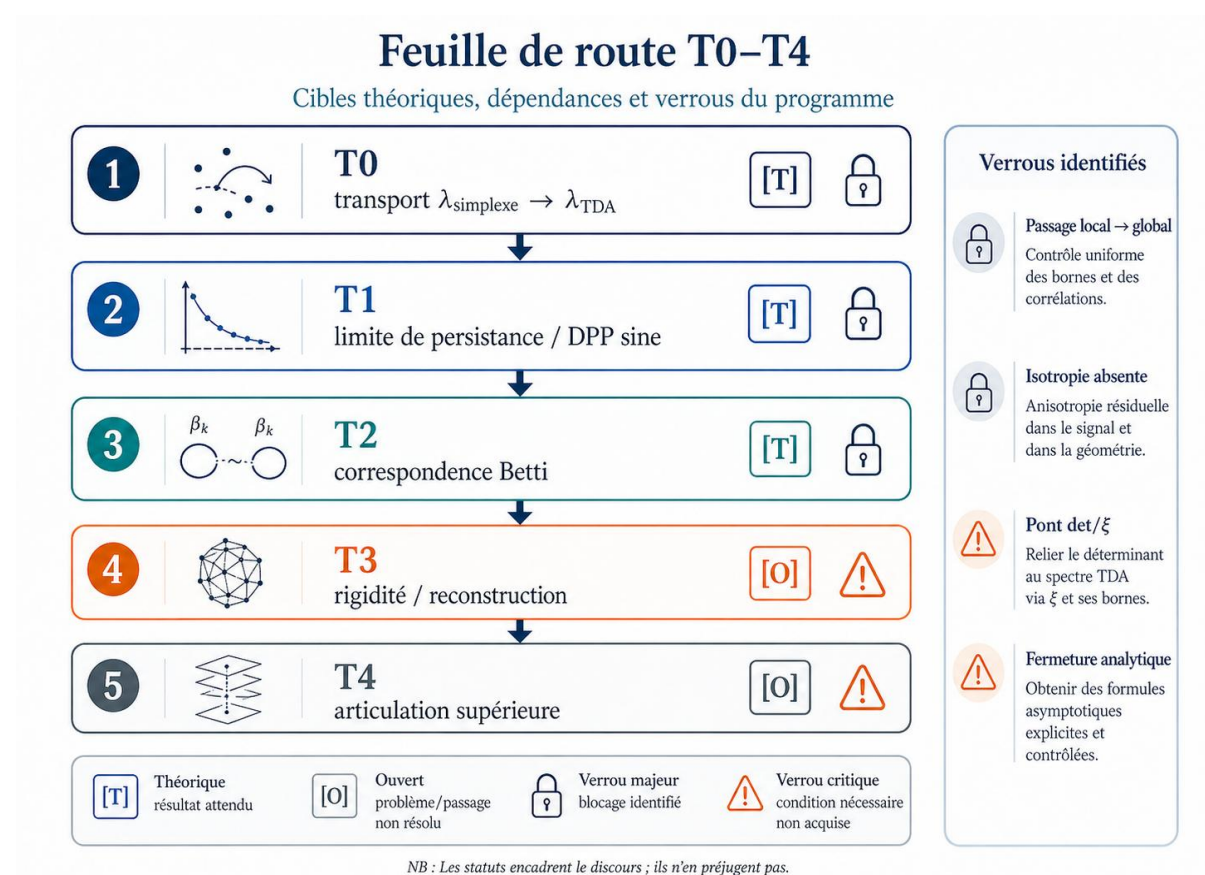


Figure intro 7 — Feuille de route T0–T4 : cibles théoriques, dépendances et verrous du programme. Cinq cibles ordonnées par priorité : T0 transport $\lambda_{\text{simplexe}} \rightarrow \lambda_{\text{TDA}}$, T1 limite de persistance / DPP sine, T2 correspondance Betti, T3 rigidité / reconstruction, T4 articulation supérieure. Les trois premières sont [T] (théoriques, résultat attendu), les deux dernières sont [O] (ouvertes, condition non acquise). À droite, les quatre verrous identifiés : passage local → global, isotropie absente, pont det/ξ, fermeture analytique. Mise à jour v38 : ces verrous sont désormais formalisés en Lean comme cinq locks doctrinaux distincts (TraceFormulaOK, CarlemanAtomicityOK, ZeroMatchingOK, Det2XiBridgeOK, ResidualZeroOK) tous au statut theoremTarget — cf. Annexe F.7.

T0. $\lambda_{\text{simplexe}}$ (Fisher–Rao sur Δ^7) = λ_{TDA} (persistance H_1 sur les zéros de ζ).

- **Verrou.** Identifier le foncteur de transport entre les deux couches.
- **Difficulté.** Modérée (★★).
- **Précédence.** T0 doit être démontré avant T1.

T0 est la plus accessible des cinq cibles. L'égalité observée empiriquement — $\lambda_{\text{simplexe}}$ et λ_{TDA} s'accordent à 4 décimales — appelle une démonstration formelle qu'on n'a pas encore. Le verrou n'est

pas une difficulté analytique majeure, c'est une **question d'identification structurelle** : trouver le foncteur qui réalise mathématiquement le pont.

7.2 T1 — la limite de persistance

T1. Pour le DPP sine (limite locale GUE), il existe une limite de persistance en distance W_2 , et l'application $\text{loi} \rightarrow \text{diagramme}$ est continue avec concentration uniforme.

- **T1(a) — Existence des limites.** Tension dans l'espace des mesures de Radon.
- **T1(b) — Continuité $\text{loi} \rightarrow \text{diagramme}$.** Uniformité du contrôle quand $T \rightarrow \infty$.
- **T1(c) — Concentration uniforme.** Verrou principal. Talagrand classique fonctionne pour les fonctionnelles convexes mais pas non-convexes. Difficulté ★★★★★.

T1(c) est le mur principal. Les inégalités de concentration de Talagrand demandent typiquement la convexité de la fonctionnelle. Or les fonctionnelles de persistance topologique sont en général non-convexes — la persistance d'un cycle peut sauter de manière discontinue quand la filtration franchit un seuil critique. Adapter la machinerie de concentration à ce cadre est un projet de recherche en lui-même.

7.3 T2, T3, T4

Cible	Énoncé	Difficulté	Verrou
T2	Pont entre corrélations k-niveaux du DPP sine et nombres de Betti.	★★	Bootstrap depuis T1.
T3	Universalité topologique TDA (Katz–Sarnak).	★★	Combinaison Katz–Sarnak + T1.
T4	Borne PAC-Bayes topologique.	★★★	Concentration + Lipschitz.

Tableau 7 — Cibles théorèmes T2–T4 avec leurs verrous techniques principaux.

7.4 Précision essentielle

T3 ne porte PAS la déclaration d'universalité spectrale. T3 porte la déclaration d'universalité TOPOLOGIQUE au sens TDA, qui est strictement plus faible. Le passage de T3 à un pont vers ζ est un autre théorème (centré sur $V_{\text{eff}}^{\det_2}$), pas une conséquence de T3.

Cette précision est cruciale et c'est exactement le genre de glissement que la grille épistémique attrape. Un lecteur pressé pourrait lire « universalité topologique » et l'interpréter comme « universalité spectrale » — qui implique HP. Les deux ne sont **pas équivalents**. L'universalité topologique parle des invariants topologiques (nombres de Betti, persistance) ; l'universalité spectrale parle des valeurs propres elles-mêmes. La première est une projection de la seconde, pas son équivalent.

7.5 Conséquence pour les invariants

Si T1, T2, T3 sont démontrés, TopologicalUniversalityClaimed pourra basculer à true. Mais RHClaimed restera false — il faudra autre chose (l'identité déterminantielle) pour le lever.

Pourquoi cela compte — Dans tout grand projet (réseau, sécurité, infrastructure), il y a une carte de cibles. Certaines sont [T] (énoncées, attaquables), d'autres [O] (ouvertes, sans plan). Le programme distingue les deux. Vous aussi, dans vos projets, vous aurez à classer : « celle-ci, je sais comment l'attaquer (T) ; celle-là, j'ai juste l'intuition qu'il faudrait quelque chose (O) ». Le mélange des deux mène à des promesses qu'on ne peut pas tenir.

✓ Ce que je peux dire — T0-T4 sont des cibles théorèmes formulées proprement avec verrous identifiés.
 X Ce que je ne peux pas dire — T0-T4 sont des théorèmes presque prouvés. → Bonne formulation — T0-T4 sont des [T] — énoncés posés, preuves à compléter, verrous nommés. Le statut [T] est intermédiaire entre [C] (formulation falsifiable) et [P] (preuve achevée).

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Aucune des cibles T0-T4 n'est prouvée. C'est précisément le sens du tag [T].
- **[E] Ce qui est empirique** : $\hat{\lambda}_{TDA} \approx 0,3781 \pm 0,0014$ sur 350 zéros est [E] et motive T1, mais ne le prouve pas.
- **[C] Ce qui est conjectural** : T0 et T1 sont conjecturalement vraies (intuition forte) mais [T] tant que les verrous ne sont pas levés.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Quelle est la difficulté réelle de chaque verrou ?
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Les cinq cibles, leurs énoncés courts, et la précision sur T3.

Exercice : Pour chaque cible, dis en une phrase pourquoi elle est dans [T] et pas [P]. De mémoire.

Chapitre 8 — Adjonction HP expliquée sans jargon

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 8 Compétence visée — Comprendre ce qu'une adjonction organise, sans nécessairement maîtriser la théorie des catégories. Idée-clé — Poser une adjonction n'est pas démontrer ce qu'elle organise. C'est un cadre, pas une preuve. Erreur typique — Croire qu'avoir nommé $F \dashv G$ équivaut à avoir démontré HP. Geste scientifique attendu — Distinguer le squelette catégorique (cadre formel) et son remplissage (théorèmes à démontrer). Question finale — Une adjonction est-elle une équivalence ? Une bijection ? Autre chose ?

8.1 Avertissement

Ce chapitre introduit la théorie des catégories. Si vous ne l'as pas vue dans votre licence, c'est normal — c'est typiquement enseigné en M2. **L'enjeu n'est pas que vous maîtrisez la théorie des catégories.** L'enjeu est que vous compreniez ce qu'une adjonction **organise**.

8.2 Un exemple concret : Galois

Vous connaissez la résolution des équations polynomiales : $x^2 - 2 = 0$ a deux racines $\pm\sqrt{2}$. La théorie de Galois associe à chaque polynôme deux objets :

- **Une extension de corps** — par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- **Un groupe de symétries** — l'identité et $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$.

Ces deux objets sont liés par une correspondance biunivoque entre sous-extensions et sous-groupes. C'est une **adjonction**. Vous en as donc déjà rencontré une — sans nécessairement le savoir.

8.3 L'adjonction en deux phrases

Une adjonction entre deux catégories A et B est la donnée de deux opérations $F : A \rightarrow B$ et $G : B \rightarrow A$, avec une correspondance biunivoque entre :

- « les morphismes $F(a) \rightarrow b$ dans B »
- « les morphismes $a \rightarrow G(b)$ dans A »

On note $F \dashv G$. Trois propriétés :

- **Asymétrie.** F et G ne sont pas inverses.
- **Réciprocité.** La correspondance des morphismes est biunivoque.
- **Non-domination.** Aucun des deux n'est privilégié.

8.4 L'adjonction HP

$$F_{HP} \dashv G_{HP} : \text{Arith} \rightleftarrows \text{Spec}$$

Adjonction Hilbert–Pólya : $F_{HP} \dashv G_{HP}$

Architecture conceptuelle entre Arith et Spec

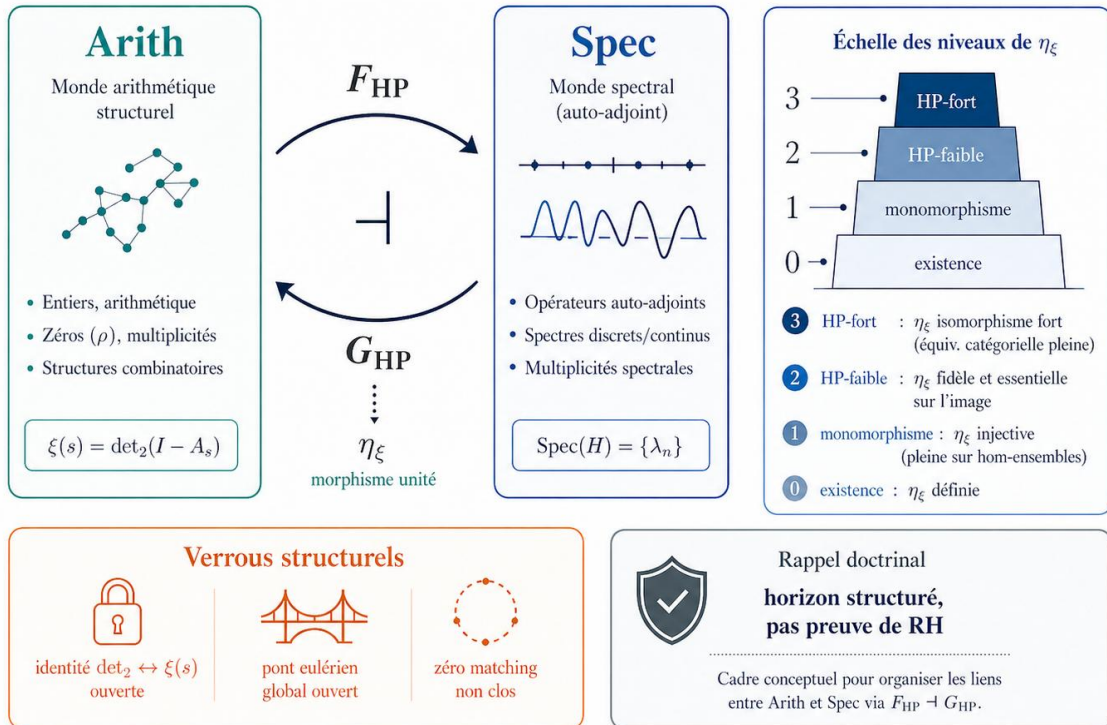


Figure 12 — Adjonction Hilbert–Pólya $F_{HP} \dashv G_{HP}$: architecture conceptuelle entre Arith et Spec. À gauche, le monde arithmétique structurel (entiers, zéros ρ , structures combinatoires) ; au milieu, l'unité η_ξ et les flèches F_{HP} / G_{HP} ; à droite, le monde spectral auto-adjoint (opérateurs, spectres, multiplicités). En bas-gauche, les trois verrous structurels (identité $\det_2 \leftrightarrow \xi(s)$ ouverte, pont eulérien global ouvert, zéro matching non clos). En haut-droite, l'échelle des quatre niveaux de η_ξ (existence $\rightarrow$ monomorphisme $\rightarrow$ HP-faible $\rightarrow$ HP-fort). En bas-droite, le rappel doctrinal : horizon structuré, pas preuve de RH.

- **Arith.** Catégorie des objets arithmétiques : ζ , ξ , fonctions L, leurs zéros, facteurs gamma.
- **Spec.** Catégorie des objets spectraux : opérateurs auto-adjoints, déterminants régularisés.
- **F_{HP} .** La spectralisation.
- **G_{HP} .** La reconstruction.

8.5 Statut actuel

- **F_{HP} bien définie sur $\sigma \geq 1/2$.** [P] via H1 KLMN, $\|M\|_{HS} \leq P(3/2) \approx 0,8495 < 1$.
- **G_{HP} en cours de construction.** Squelette = chaîne de rigidité C0–C5. [T] partiellement.
- **Monadicité $F_{HP} \dashv G_{HP}$.** Ouverte. [O]

Poser l'adjonction n'est pas démontrer HP. C'est organiser ce qu'il faudrait démontrer.

Pourquoi cela compte — En architecture logicielle, on dessine souvent des « ponts catégoriques » sans les démontrer : « la couche métier converse avec la couche persistance via des DTO ». Tant que le pont n'est pas vérifié (test d'intégration, contract testing), on a posé une adjonction sans démontrer sa cohérence. Le code peut très bien sembler fonctionner et casser silencieusement.

✓ Ce que je peux dire — L'adjonction $HP \dashv\dashv G$ organise formellement la relation entre arithmétique et spectre. ✗ Ce que je ne peux pas dire — L'adjonction HP démontre l'hypothèse de Riemann. → Bonne formulation — L'adjonction HP fournit un cadre formel pour énoncer HP-faible et HP-fort. La démonstration de l'un ou l'autre niveau (η_ξ niveau 2 ou 3) reste ouverte.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : L'adjonction est mathématiquement standard depuis Lawvere 1969. F_{HP} est bien définie sur $\sigma \geq 1/2$ [P] via H1 KLMN.
- **[E] Ce qui est empirique** : Aucune mesure de l'adjonction elle-même.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture spécifique à l'adjonction.
- **[O] Ce qui est ouvert** : La construction complète de G_{HP} , la monadicité, l'équivalence sur l'objet critique.
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Ce qu'une adjonction organise, et ce qu'elle ne prouve pas en elle-même.

Exercice : Trouve un autre exemple d'adjonction dans une discipline que vous connaissez (physique, informatique). Décris pourquoi cela ressemble à une adjonction.

Chapitre 9 — η_ξ : quatre niveaux pour distinguer espoir et preuve

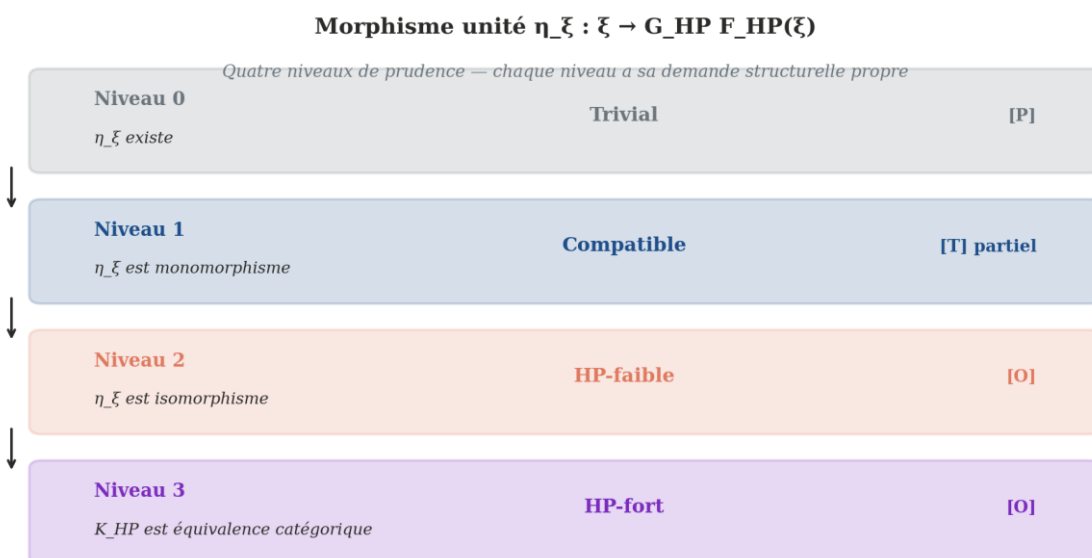
FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 9 Compétence visée — Maîtriser la grille de prudence à quatre niveaux pour situer toute affirmation HP. Idée-clé — Le passage du niveau 0 au niveau 2 ou 3 est ce qui distingue une structure formelle d'une démonstration HP. Erreur typique — Confondre HP-faible (niveau 2) et HP-fort (niveau 3). Geste scientifique attendu — Devant toute affirmation HP, demander : à quel niveau de η_ξ ? Question finale — Si demain quelqu'un dit « j'ai démontré HP », quelle est votre première question ?

9.1 Le morphisme unité

Toute adjonction $F \dashv G$ a un morphisme naturel d'unité. Pour notre adjonction $F_{HP} \dashv G_{HP}$, appliqué à ξ :

$$\eta_\xi : \xi \rightarrow G_{HP} F_{HP}(\xi)$$

9.2 Les quatre niveaux



Tant que niveau 2 ou 3 n'est pas démontré : $RH_{\text{Claimed}} = \text{false}$

Figure 13 — Les quatre niveaux du morphisme unité η_ξ . Chaque niveau a sa demande structurelle propre. Le niveau 2 = HP-faible (énoncé classique d'Hilbert-Pólya). Le niveau 3 = HP-fort (équivalence catégorique). Tant que ni le 2 ni le 3 n'est démontré, RH_{Claimed} reste à false.

Niveau	Énoncé	Statut HP	Demande structurelle
0	η_ξ existe	Trivial	Adjonction posée
1	η_ξ est monomorphisme	Compatible	F_{HP} ne perd pas d'information sur ξ
2	η_ξ est isomorphisme	HP-faible	Existence d'un opérateur dont le spectre encode ξ
3	K_{HP} est équivalence	HP-fort	Structure arithmétique reconstructible depuis Spec

Tableau 8 — Les quatre niveaux du morphisme unité η_ξ avec leurs implications pour HP.

9.3 Pourquoi cette distinction

Tant que ni le niveau 2 ni le niveau 3 n'est démontré, $RH_{\text{Claimed}} = \text{false}$. Le programme distingue strictement les deux parce que cela change ce qu'on peut déclarer publiquement.

- **HP-faible démontré.** « il existe un opérateur auto-adjoint dont le spectre ramène les zéros de ζ ».
- **HP-fort démontré.** « la couche spectrale est équivalente à la couche arithmétique pour ce qui concerne ξ ».
- **Aucun des deux.** Statut actuel.

9.4 Statut actuel des niveaux

- **Niveau 0 :** trivial. [P]
- **Niveau 1 :** partiellement [T].
- **Niveau 2 :** [O]. C'est ce que le sorry `lock3_operator_exists` exprime.
- **Niveau 3 :** [O]. Demande la monadicité au sens de Beck.

Pourquoi cela compte — Dans toute discussion sur les frontières de la connaissance (IA, physique fondamentale, mathématiques), vous rencontrerez des « niveaux ». « On a démontré X » peut signifier des choses très différentes selon le niveau visé. Demander explicitement « à quel niveau ? » est une compétence transversale.

✓ Ce que je peux dire — η_ξ a quatre niveaux distincts, chacun avec sa demande structurelle propre. ✗
Ce que je ne peux pas dire — Démontrer η_ξ à un niveau quelconque (par exemple niveau 0) suffit à prouver HP. → Bonne formulation — HP-faible (niveau 2) et HP-fort (niveau 3) sont deux niveaux distincts. Le niveau 0 et le niveau 1 sont des étapes intermédiaires sans portée HP.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé :** L'adjonction et son unité η_ξ sont mathématiquement définies. Niveau 0 trivialement [P].
- **[E] Ce qui est empirique :** Aucune mesure des niveaux.
- **[C] Ce qui est conjectural :** Aucune conjecture sur le niveau effectif de η_ξ .
- **[O] Ce qui est ouvert :** Niveaux 2 et 3 sont les questions ouvertes du programme.
- **Ce que vous devez savoir expliquer :** Les quatre niveaux et la distinction HP-faible / HP-fort.

Exercice : Si demain quelqu'un dit « j'ai démontré HP », votre première question doit être : à quel niveau ? Donne deux raisons pour lesquelles cette question est sensée.

Chapitre 10 — Les huit règles de discipline déclarative

FICHE PÉDAGOGIQUE — chapitre 10 Compétence visée — Maîtriser les huit règles, savoir nommer le mode d'erreur que chacune attrape, et savoir les transférer. Idée-clé — Chaque règle attrape un mode d'erreur distinct. Les huit règles ne sont pas redondantes. Erreur typique — Croire qu'une règle suffit (souvent : R1 reproductibilité). Ce serait laisser sept portes ouvertes. Geste scientifique attendu — Devant un claim, identifier quelle règle est testée et appliquer mécaniquement. Question finale — Si vous en supprimez une, quelle porte rouvrez-vous ?

10.1 Origine

Les huit règles ont été extraites progressivement de l'expérience du programme — notamment de l'incident σ_G^* et de l'audit M56. Elles forment la **charte épistémique** du programme. C'est probablement le résultat le plus directement transférable du dossier — celui que vous utiliserez le plus dans votre métier.

Les huit règles de discipline déclarative
Chaque règle attrape un mode d'erreur distinct · Aucune n'est redondante



Figure 14 — Les huit règles R1–R8 organisées en couronne autour de la charte épistémique. Chaque règle a sa couleur, son mode d'erreur, et son indépendance. Aucune ne se déduit des autres.

10.2 Les huit règles

R1 — Reproductibilité triple

Toute valeur numérique en circulation doit avoir : (a) méthode (script + version), (b) précision (dps documenté), (c) plage de confiance. Sans ce triple, valeur INDÉTERMINÉE.

R2 — Pas d'identité à 4 décimales

Coïncidence à 4 décimales avec une constante canonique = jamais une identité. Pour identité, ≥ 15 décimales OU dérivation analytique.

R3 — Pas de substitution InterIA

Le consensus inter-IA ne remplace pas la vérification arbitraire-précision. Trois IA d'accord sur une fausse identification ne la rendent pas vraie.

R4 — Niveau de claim par document

Document interne : valeurs conjecturales tolérées avec marqueur [I] ou [N]. Document externe : valeur prouvée OU paramètre abstrait OU rien.

R5 — Paramètres abstraits par défaut

En cas de doute, axiomatiser avec propriétés qualitatives plutôt que figer une valeur fragile.

R6 — Typage épistémique systématique

Toute affirmation porte un tag : [P], [P|H], [E], [C], [T] ou [O]. Non-tagée = traitée [O].

R7 — Garde mécanique avant slogan

Aucun slogan externe ne survit sans garde déclarative explicite. `RHClaimed = false` et `TopologicalUniversalityClaimed = false` sont les gardes actuelles.

R8 — Dépromotion propre (NEW v5)

Quand un claim échoue son test, il **n'est pas** silencieusement supprimé. Il est explicitement déclassé d'un cran ($[P] \rightarrow [P|H]$, $[P|H] \rightarrow [C]$, $[C] \rightarrow [E]$, $[E] \rightarrow [O]$) et conservé comme cas-école documenté. La dépromotion préserve la mémoire scientifique sans propager l'erreur.

10.3 Pourquoi huit règles distinctes

Règle	Mode d'erreur attrapé	Où σ_G^* aurait glissé sans elle
R1	Valeurs flottantes sans contexte	Pas $\Delta\sigma \approx 0,001$ non spécifié dans rapports initiaux
R2	Fausse identité à 4 décimales	Match direct $0,3142 \rightarrow \pi/10$
R3	Renforcement circulaire InterIA	Trois IA d'accord avant tout test
R4	Contamination interne $\rightarrow$ externe	Risque de $\sigma_G^* = \pi/10$ atteignant publication
R5	Figeage prématuré de valeur	noncomputable def $\sigma_G := 0.3142$
R6	Dérive de statut sans tag	Identification σ_G^* initialement non typée
R7	Slogans externes sans garde	« Transition topologique trouvée à $\pi/10$ »
R8	Effacement silencieux de claims échoués	Suppression de $\sigma_G^* = \pi/10$ sans trace

Tableau 9 — Chaque règle attrape un mode d'erreur distinct, illustré sur l'incident σ_G^* .

Huit règles, huit modes d'erreur. Chaque règle est minimale — elle ne se déduit pas des autres. Si vous en supprimez une, vous rouvrez une porte.

✓ Ce que je peux dire — Les huit règles forment une charte épistémique cohérente, chaque règle attrapant un mode d'erreur distinct. X Ce que je ne peux pas dire — Une seule règle (par exemple R1) suffit à protéger la rigueur scientifique. → Bonne formulation — R1-R8 sont complémentaires et indépendantes. Supprimer une règle, c'est rouvrir une porte d'erreur spécifique.

Synthèse de fin de chapitre

- **[P] Ce qui est prouvé** : Les huit règles sont des conventions. Pas des théorèmes, mais leur efficacité est documentée.
- **[E] Ce qui est empirique** : L'application des huit règles dans le programme est documentée et cohérente.
- **[C] Ce qui est conjectural** : Aucune conjecture sur les règles.
- **[O] Ce qui est ouvert** : Y a-t-il une R9 manquante ?
- **Ce que vous devez savoir expliquer** : Les huit règles avec leur libellé court, et le mode d'erreur que chacune attrape.

Exercice : Choisissez un domaine professionnel (réseau, sécurité, support) et écris les huit règles adaptées à ce domaine. Une page max.

Chapitre 11 — Exercices guidés à trois paliers

Pour chaque exercice : niveau 1 (réponse libre), niveau 2 (indice si bloqué), niveau 3 (corrigé commenté).
Joue le jeu : tente le niveau 1 avant de regarder le niveau 2.

Exercice 1 — Typer cinq affirmations

Niveau 1 — Réponse libre

Classe en [P], [P | H], [E], [C], [T] ou [O] :

5. Le théorème de Pythagore.
6. La constante de structure fine α est très proche de $1/137$.
7. Tout pair > 2 est somme de deux premiers (Goldbach).
8. On peut formuler proprement une concentration Talagrand non-convexe pour les fonctionnelles de persistance.
9. Quand on observe les corrélations entre zéros de ζ , on voit quelque chose qui ressemble au GUE.

Niveau 2 — Indice

Pour chaque affirmation, demande-vous : est-ce vérifiable ligne à ligne, mesuré, falsifiable, formulé comme cible, ou simplement observé ?

Niveau 3 — Corrigé commenté

1. [P] (théorème classique). 2. [E] (mesure CODATA, plage documentée). 3. [C] (formulée, falsifiable, pas démontrée). 4. [T] (c'est précisément T1(c)). 5. [O] (observation, pas d'énoncé formel équivalent ni cible posée).

Exercice 2 — Local vs global

Niveau 1 — Réponse libre

Pour chaque énoncé, identifie : (a) le succès local affirmé, (b) la revendication globale qui serait fausse de tirer de (a).

10. Tous les zéros de ζ jusqu'à hauteur $3 \cdot 10^{12}$ sont sur la ligne critique.
11. Notre observable V_{eff} (Rubinstein–Sarnak classique) vaut 0,055 pour $q = 30$.
12. $\hat{\Lambda}_{\text{TDA}}$ mesuré sur 350 zéros vaut 0,3781.

Niveau 2 — Indice

Pour chaque énoncé, demande-vous : ce résultat couvre-t-il un fini ou un infini ? un cas ou une famille ? une hauteur ou toutes les hauteurs ?

Niveau 3 — Corrigé commenté

1. Local : vérification jusqu'à $3 \cdot 10^{12}$. Global faux : donc RH démontrée. 2. Local : $q = 30$. Global faux : V_{eff} a une loi universelle — il faut tester $q = 210, 2310$. 3. Local : 350 zéros stables. Global faux : donc T1 démontré — la mesure répétée n'est pas une preuve.

Exercice 3 — Circularité InterIA

Niveau 1 — Réponse libre

Trois IA convergent sur l'affirmation : la valeur $\sigma_X = 0,5772$ est la constante d'Euler-Mascheroni $\gamma \approx 0,5772156...$ Quelle est la première vérification à faire ?

Niveau 2 — Indice

Ne vous fie pas au consensus. Quelle règle attrape ce cas ?

Niveau 3 — Corrigé commenté

Faire le test à $\text{mpmath dps} \geq 15$. Si σ_X est mesuré à $\text{dps}=4$ et qu'on parle d'identité avec γ qui a 15+ décimales connues, c'est probablement un artefact (R2). Test : remesurer à $\text{dps}=20$ et voir s'il converge vers γ ou vers une autre valeur.

Exercice 4 — Lire un claim conditionnel

Niveau 1 — Réponse libre

Énoncé : Sous l'hypothèse de Riemann, le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers est en $O(\sqrt{x} \cdot \log x)$. Trois questions à poser.

Niveau 2 — Indice

Pense à la grille en quatre questions du chapitre 1. Quel est le statut ? Quelle est l'hypothèse ? Que se passe-t-il si elle tombe ?

Niveau 3 — Corrigé commenté

1. Hypothèse : RH (zéros non triviaux ont partie réelle $1/2$). 2. Si RH tombe, l'estimation devient $O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$. 3. Le théorème conditionnel est $[P | RH]$. La conclusion sans hypothèse serait $[O]$.

Exercice 5 — Construire un argument doctrinal

Niveau 1 — Réponse libre

Vous travaillez dans une équipe d'infrastructure réseau. Un collègue affirme : *notre nouveau monitoring détecte les anomalies à 99,7 % ; on peut le déployer en production*. Construis un argument utilisant les huit règles pour demander des précisions.

Niveau 2 — Indice

Applique R1, R2, R3, R6, R7 et R8. Dois-vous déjà déployer ou demander des précisions ?

Niveau 3 — Corrigé commenté

« 99,7 % sur quel jeu de test (R1 méthode) ? À quelle précision (R1 précision) ? Avec quel intervalle de confiance (R1 plage) ? Le 99,7 % est-il très près de 99,73 % = couverture σ d'une gaussienne — coïncidence ou conception (R2) ? Le développeur s'appuie-t-il sur trois IA (R3) ? Le claim est-il [P] (testé), [E] (mesuré sur jeu test), ou [C] (extrapolation) (R6) ? Quelle est la garde en production (R7) ? Si les 99,7 % chutent à 80 % en prod, le système accepte-t-il une dépromotion documentée (R8) ? »

Exercice 6 — Test final de mémorisation

Niveau 1 — Réponse libre

Sans relire le dossier, énumère : les cinq invariants doctrinaux, les six statuts épistémiques, les huit règles, les quatre niveaux de η_ξ , les cinq cibles théorèmes T0-T4, la triade post-M56.

Niveau 2 — Indice

Si vous bloquez sur un, passe au suivant et reviens. Compte le total ce que vous avez récupéré sur 31.

Niveau 3 — Corrigé commenté

$5 + 6 + 8 + 4 + 5 + 3 = 31$ éléments. Si vous en récupères plus de 25, c'est très bon. Refais l'exercice dans deux semaines sans relire — c'est le vrai test.

Chapitre 12 — Glossaire

Termes principaux par ordre alphabétique. Chaque entrée donne une définition courte et le renvoi au chapitre correspondant.

Terme	Définition courte	Chap.
Adjonction ($F \dashv G$)	Structure catégorique : correspondance biunivoque entre morphismes de $F(a) \rightarrow b$ et morphismes de $a \rightarrow G(b)$.	8
Caractère de Dirichlet	Fonction multiplicative à valeurs dans $\mathbb{C}$, sur G_{30} , classifiant les résidus mod 30.	6
[C] Conjectural	Affirmation explicite et falsifiable, pas démontrée.	2
$\det_2(I - zM)$	Déterminant régularisé d'ordre 2. Disponible pour $\sigma > 0$.	6, 8
DPP sine	Déterminantal point process noyau sine — limite locale GUE.	7
[E] Empirique	Mesure pipelinée avec triple R1 documenté.	2
G_{30}	Le groupe $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ des inversibles modulo 30. $ G_{30} = 8$.	6
GUE	Gaussian Unitary Ensemble. Modèle de matrices aléatoires.	7
HP-faible / HP-fort	Niveaux 2 et 3 de η_ξ . Faible = isomorphisme. Fort = équivalence catégorique.	9
Invariant doctrinal	Garde mécanique : RHClaimed, TopologicalUniversalityClaimed, etc. Tous false.	page 2
KLMN	Théorème (Kato-Lions-Lax-Milgram-Nelson) d'auto-adjonction sous contrôle de norme.	6, 8
$\lambda_{\text{simplexe}} = 1/\sqrt{7}$	Invariant géométrique de Δ^7 sous Fisher-Rao. [P isotropie] post-M56.	4
$\hat{\lambda}_{\text{TDA}} \approx 0,3781 \pm 0,0014$	Mesure empirique de transport TDA sur 350 zéros de ζ . [E].	4
LMFDB	L-functions and Modular Forms Database. Numérotation Conrey de référence.	6
M56	Audit de mars 2026. Test d'isotropie sur 56 directions. Verdict : isotropie rejetée.	4
Mur H3	$\langle r \rangle \approx 0,62 > \text{GUE attendu}$. Verrou central. [O].	7
[O] Ouvert	Phénomène ou intuition sans énoncé formel.	2
[P] Prouvé	Démontré inconditionnellement (théorème publié, Lean compile, ou decide direct).	2
[P H] Prouvé sous H	Théorème démontré, mais sous hypothèse H explicite.	2
Persistence topologique	Outil TDA mesurant la durée de vie d'éléments topologiques à travers une filtration.	7
RH (hypothèse de Riemann)	Zéros non triviaux de ζ ont partie réelle 1/2. RHClaimed = false.	page 2
Rubinstein-Sarnak	Cadre 1994 : $V_{\text{eff}}(\sigma) = \sum c_\chi ^2 V(\chi, \sigma)$. Pont local-global.	4
σ_{G^*}	Paramètre topologique de bascule. Incident avril 2026. Désormais axiomatisé.	5
[T] Cible théorème	Énoncé formel posé, verrous identifiés, preuve à compléter.	2

Terme	Définition courte	Chap.
$TC = \{1, 11, 29\}$	Triplet de Couret. Stable par inversion, pas par produit (fantôme 19).	3, 6
Triade post-M56	λ transporte / $V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}$ ponté / $\det/\xi$ décide.	4
$V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}(q, \sigma)$	Observable mésoscopique du pont local-global, candidat de la Conjecture Q3. À distinguer du V_{eff} classique (Rubinstein–Sarnak) qui vaut 0,055 à $q=30$ et a réfuté l’universalité de λ . [C].	4, 7
η_ξ (morphisme unité)	$\xi \rightarrow G_{\text{HP}} F_{\text{HP}}(\xi)$. Quatre niveaux : 0 existe, 1 mono, 2 iso (HP-faible), 3 K_{HP} équivalence (HP-fort).	9

Chapitre 13 — Bibliographie commentée

Sélection minimale, classée par utilité pour vous.

13.1 Pour la grille épistémique

- **Karl Popper**, *La logique de la découverte scientifique* (1934). Origine de la falsifiabilité, base du tag [C]. Chapitres 1-4 suffisent.
- **Imre Lakatos**, *Preuves et réfutations* (1976). Dialogue brillant sur la construction d'une preuve mathématique en pratique.

13.2 Pour le matériau arithmétique

- **Hardy & Wright**, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Classique niveau Licence. Chapitres 1-7 pour solidifier.
- **Tom Apostol**, *Introduction to Analytic Number Theory* (1976). Pour comprendre ζ et pourquoi RH est important. Niveau M1.

13.3 Pour la grille catégorique

- **Tom Leinster**, *Basic Category Theory* (Cambridge 2014). Introduction la plus accessible. Chapitres 1-3 pour $F \rightarrow G$. Disponible sur arXiv.

13.4 Pour le contexte 2026

- **Connes (2026)**, « *The Riemann Hypothesis: Past, Present and a Letter Through Time* » arXiv:2602.04022. Contexte 2026. Intro et conclusion accessibles.
- **Platt & Trudgian (2021)**, « *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* » Bulletin LMS. Record de vérification numérique rigoureuse par interval arithmetic.

13.5 Pour la persistance topologique

- **Cohen-Steiner, Edelsbrunner, Harer (2007)**, « *Stability of Persistence Diagrams* ». Article fondateur de la stabilité TDA, théorème central pour T1.

13.6 Pour Lean

- **Lean prover community**, *Theorem Proving in Lean 4* (gratuit en ligne). Manuel d'introduction si vous voulez ouvrir le pack.

Chapitre 14 — Chronogramme des deux journées

Deux journées denses mais sans précipitation. Pauses régulières, déjeuner posé. Si on est en retard, on raccourcit J2 et vous reprenés en autonome (chap. 15).

Jour 1 — Discernement et noyau fini

Heure	Activité	Réf.
9h00–9h30	Ouverture, lecture invariants + phrase directrice + carte des couches	Pages liminaires
9h30–10h45	Chap. 0 et 1 : pourquoi le dossier, comment lire	Chap. 0–1
10h45–11h00	Pause	
11h00–12h30	Chap. 2 : six statuts détaillés, focus sur [P H]	Chap. 2
12h30–14h00	Déjeuner	
14h00–15h00	Chap. 3 : Bernard et l'origine du matériau	Chap. 3
15h00–16h30	Chap. 4 : audit M56 et reclassement de λ avec [P H]	Chap. 4
16h30–16h45	Pause	
16h45–18h00	Chap. 5 : incident σ_G^* et dépromotion (R8)	Chap. 5

Jour 2 — Cibles, cadre, exercices, mini-soutenance

Heure	Activité	Réf.
9h00–9h30	Récap J1, questions ouvertes	
9h30–11h00	Chap. 6 : noyau fini, Lean, ce qui est solide	Chap. 6
11h00–11h15	Pause	
11h15–12h30	Chap. 7 : T0–T4, programme long terme	Chap. 7
12h30–14h00	Déjeuner	
14h00–15h30	Chap. 8 et 9 : adjonction HP et niveaux η_x	Chap. 8–9
15h30–15h45	Pause	
15h45–16h45	Chap. 10 : huit règles, transferts professionnels	Chap. 10
16h45–17h30	Chap. 11 : exercices guidés à trois paliers (en commun)	Chap. 11
17h30–18h00	Mini-soutenance de l'apprenant (10 min) + barème + plan 30 j	Chap. 16

Chapitre 15 — Plan autonome de 30 jours

15.1 Pourquoi un plan autonome

Deux journées ensemble suffisent pour poser le dispositif. La maîtrise se construit en quatre semaines de retours réguliers. Le plan demande 2 à 4 heures par semaine, pas plus.

15.2 Semaine 1 — Maîtriser les statuts

- **Lundi (1h).** Relis chap. 0, 1, 2. Refais l'exercice 1 du chap. 11.
- **Mercredi (45 min).** Prends un article de presse scientifique. Annote-le avec les six tags.
- **Vendredi (30 min).** Refais l'exercice 6 (test final de mémorisation).

Livable S1 : Une page « Je sais distinguer [P], [P|H], [E], [C], [T], [O] » avec exemple personnel pour chaque tag.

15.3 Semaine 2 — Pratiquer la discipline

- **Lundi (1h).** Relis chap. 4 (M56) et chap. 5 (σ_G^*). Note ce que vous n'as pas compris à la première lecture.
- **Mercredi (45 min).** Lis Hardy & Wright chap. 1. Vérifie les classes premières mod 30 sur 100 nombres.
- **Vendredi (1h).** Refais l'exercice 5 dans un domaine que vous connaissez (réseau, sécurité).

Livable S2 : Une analyse d'un claim marketing ou scientifique récent, avec les huit règles appliquées.

15.4 Semaine 3 — Approfondir le cadre

- **Lundi (1h30).** Relis chap. 8 (adjonction). Cherche un autre exemple d'adjonction dans une discipline que vous connaissez.
- **Mercredi (1h).** Relis chap. 9 (η_ξ). Refais le tableau de mémoire.
- **Vendredi (45 min).** Lis Connes (2026) — intro et conclusion uniquement. Tag chaque conclusion.

Livable S3 : Une carte mentale des quatre niveaux de η_ξ , avec un exemple d'adjonction trouvé seul.

15.5 Semaine 4 — Synthèse et transfert

- **Lundi (1h).** Relis chap. 10. Récris les huit règles pour votre domaine technique appliqué.
- **Mercredi (1h).** Choisis un sujet hors programme. Une page d'analyse avec les huit règles.
- **Vendredi (1h).** Synthèse personnelle d'une page : ce que vous avez retenu, ce qui vous paraît superflu. Honnête.

Livable S4 : Une mini-soutenance de 10 minutes (enregistrée si vous voulez), barème auto-appliqué (chapitre 16).

15.6 Auto-évaluation finale

Critère d'exception atteint si vous pouvez dire — sincèrement — : Même si je reste prudent sur le programme global, je vois clairement ce qui est prouvé, ce qui est ouvert, ce que je peux vérifier, et pourquoi ce dossier m'est utile.

Chapitre 16 — Mini-soutenance avec barème

16.1 Format

À la fin des deux jours (ou en S4 du parcours autonome), vous présentez en 10 minutes — sans notes — ce que vous avez compris du programme Couret–Unification, sans franchir aucun garde-fou.

16.2 Sujet

Explique le programme Couret–Unification à un auditeur scientifique généraliste, sans franchir les invariants doctrinaux.

16.3 Barème explicite

Critère	Excellent	Fragile
Statuts	Vous classez correctement chaque claim en $[P]/[P H]/[E]/[C]/[T]/[O]$	Vous confonds $[E]$ et $[P]$, ou $[P H]$ et $[P]$
Prudence	Vous maintiens $RH\text{Claimed} = \text{false}$ explicitement	Vous glissez vers presque prouvé ou moralement vrai
Local / global	Vous distinguez clairement le socle fini et l'horizon HP	Vous extrapolez abusivement du fini vers le global
IA	Vous expliquez la circularité InterIA via R3	Vous vous fiez au consensus IA pour conclure
Transfert	Vous savez appliquer les huit règles à un cas réseau ou sécurité	Vous restez uniquement dans le contenu du dossier
Dépromotion	Vous citez l'incident σ_G^* comme exemple de dépromotion propre R8	Vous présentez l'incident comme un échec du programme

16.4 Phrase modèle de niveau Excellent

Le programme Couret–Unification formalise une structure spectrale finie sur $G_{30} = (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$, entièrement $[P]$ en Lean 4, et propose une architecture catégorique (adjonction HP) pour organiser le pont vers ζ — pont qui reste $[O]$. L'audit M56 a empiriquement réfuté l'isotropie sur G_{30} , ce qui a reclassé $\lambda = 1/\sqrt{7}$ en invariant géométrique $[P|\text{isotropie}]$ plutôt qu'invariant spectral universel. L'incident σ_G^ d'avril 2026 illustre comment une coïncidence à basse précision, amplifiée par consensus inter-IA, est réfutée par un test à $\text{mpmath dps}=50$, et conduit — par dépromotion propre — à axiomatiser le paramètre. $RH\text{Claimed}$ reste false, et c'est exactement le résultat le plus important.*

Annexe A — Tableau récapitulatif des figures

Toutes les figures du dossier sont rappelées ici, avec leur statut épistémique principal et leur registre (infographique de synthèse vs graphique scientifique). Cette annexe sert de référence rapide.

Fig.	Titre	Registre	Tag dominant
1	Architecture scientifique du programme	Infographique	[P]+[E]+[C]+[T]+[O]
2	Boussole épistémique et invariants doctrinaux	Infographique	—
3	Distribution des premiers mod 30	Graphique	[P] arithmétique
4	Classes mod 30, triplet TC et fantôme 19	Infographique	[P] decide
5	λ après l'audit M56 (synthèse 3 colonnes)	Infographique	[P isotropie]+[E]+[O]
6	Audit M56 — résultats numériques	Graphique	[E] négatif
7	Incident σ_G^* — 4 critères mpmath	Graphique	[E] négatif $\rightarrow$ R8
8	R8 dépromotion propre — cas-école σ_G^*	Infographique	Méthodologique
9	Graphe de Cayley G_{30} engendré par TC	Infographique	[P] Lean
10	Spectre $\{3^2, 1^4, (-1)^2\}$	Graphique	[P] Lean
11	Profil spectral des 8 caractères	Graphique	[P] Lean
12	Adjonction Hilbert–Pólya $F_HP \dashv G_HP$	Infographique	[P]+[T]+[O]
13	Quatre niveaux de η_X	Graphique	[P]+[O]
14	Huit règles R1–R8	Graphique	Méthodologique
intro 6	Noyau spectral fini : $G_{30} \rightarrow H$	Infographique	[P] Lean
intro 7	Feuille de route T0–T4	Infographique	[T]+[O]
15	Matrice Sophie Germain — répulsion diagonale	Graphique	[E]
16	Dichotomie Cycle / Coset	Infographique	[P]
17	Registre synthétique des claims (annexe C)	Infographique	Audit
18	Blindage complet — 10 tests numériques (annexe D)	Graphique	[E] solide

Annexe B — Compléments illustrés du programme

Cette annexe rassemble deux illustrations de résultats secondaires qui n'apparaissent pas dans le corps des chapitres mais font partie du programme. Elles vous évitent de les chercher dans les documents internes.

B.1 Matrice de Sophie Germain — répulsion diagonale

Une **Sophie Germain prime** est un nombre premier p tel que $2p+1$ est aussi premier. Parmi les huit classes de résidus mod 30, exactement trois — $\{11, 23, 29\}$ — sont compatibles avec la contrainte SG (les autres sont éliminées par $3 \mid (2p+1)$ ou $5 \mid (2p+1)$).

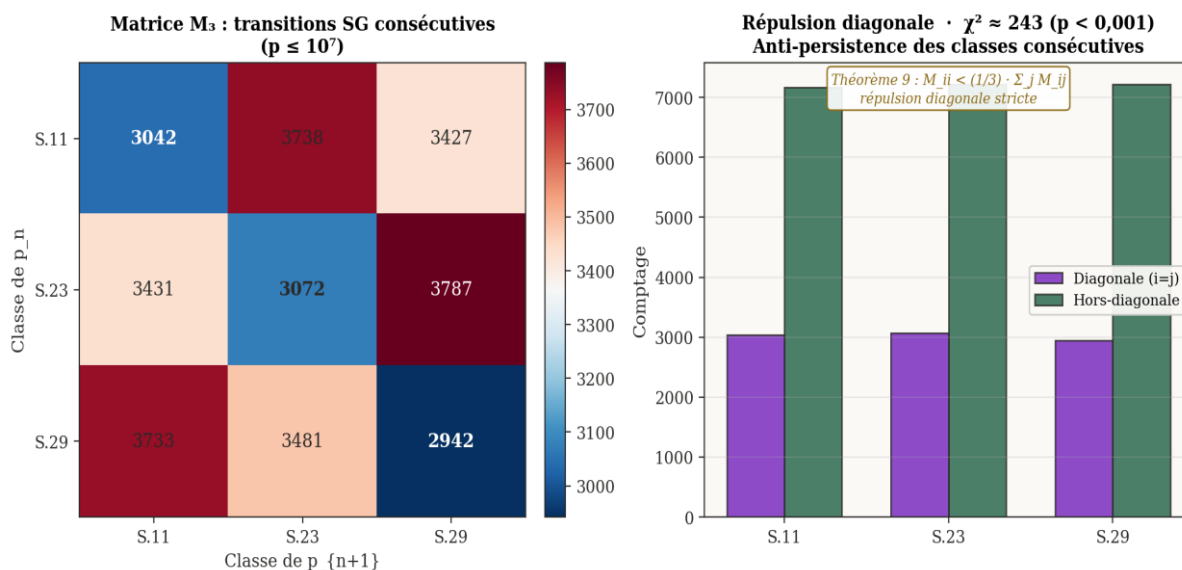


Figure 15 — Matrice M_3 des transitions entre Sophie Germain consécutives, restreinte aux trois classes $\{11, 23, 29\}$, $p \leq 10^7$. À gauche : heatmap (rouge = forte transition). À droite : diagonale ($i=j$) vs hors-diagonale par classe. Théorème 9 : $M_{ii} < (1/3) \sum_j M_{ij}$ — répulsion diagonale stricte. $\chi^2 \approx 243$ ($p < 0,001$).

Le résultat empirique : les Sophie Germain primes consécutives **évitent de répéter leur classe**. C'est une « anti-persistence » mesurable, $\chi^2 \approx 243$ contre l'hypothèse d'indépendance. Un test plus fin contre l'hypothèse de Hardy-Littlewood (indépendance ligne/colonne marginale) donne $\chi^2_{HL} = 241,68$ — résidus standardisés diagonaux à $-6,11\sigma$, $-6,51\sigma$, $-7,29\sigma$. La diagonale seule porte 55 % du χ^2 total. Statut : [E] solide.

B.2 Dichotomie Cycle / Coset

Le groupe G_{30} se décompose comme union disjointe d'un sous-groupe cyclique et d'un coset :

Dichotomie Cycle / Coset des familles premières mod 30
Cycle-purs et Coset-purs sont disjoints

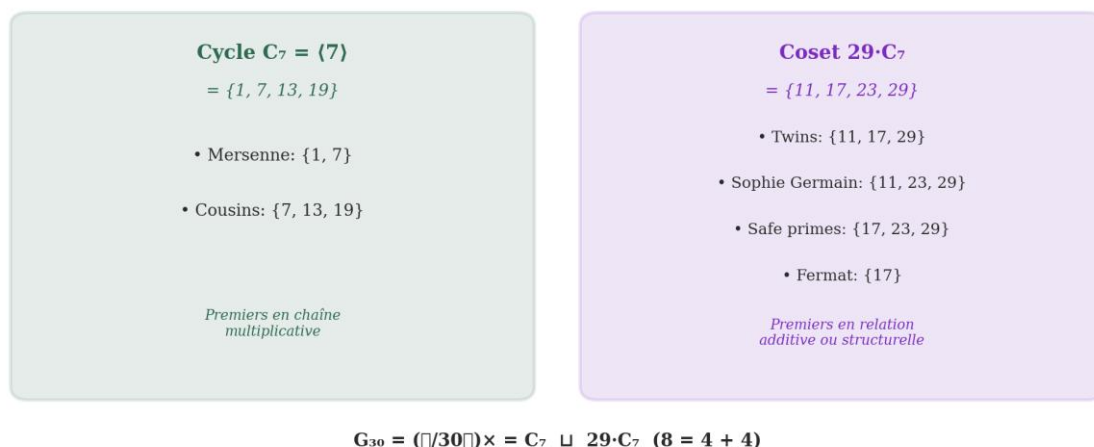


Figure 16 — Dichotomie Cycle / Coset des familles premières mod 30. Les Mersenne et cousins ont leur support dans le Cycle $C_7 = \{7\}$. Les Twins, Sophie Germain, Safe et Fermat sont dans le Coset $29 \cdot C_7$. Cycle-purs et Coset-purs sont disjoints. C'est une classification combinatoire exacte, [P].

$G_{30} = C_7 \sqcup 29 \cdot C_7$ avec $C_7 = \{1, 7, 13, 19\}$ et $29 \cdot C_7 = \{11, 17, 23, 29\}$.

Cette dichotomie a une portée surprenante : **toute famille de premiers structurée par une équation arithmétique simple** tombe entièrement dans l'un ou l'autre des deux camps. Mersenne et cousins dans le Cycle ; Twins, Sophie Germain, Safe primes et Fermat dans le Coset. Ce résultat est purement [P], obtenu par énumération.

Annexe C — Registre synthétique des claims du programme

Cette annexe rassemble en une seule planche le statut de toutes les affirmations majeures du programme. Pour chaque claim : son statut épistémique, son hypothèse ou dépendance, le type de preuve ou de mesure qui le supporte, le risque associé, et la formulation publique recommandée. C'est la **table de chevet** du programme : avant d'écrire ou de dire quoi que ce soit en public, on vérifie ici.

Registre synthétique des claims du programme

Vue d'audit des affirmations majeures

Claim	Statut	Hypothèse / dépendance	Preuve ou mesure	Risque	Formulation publique
1  Noyau fini G_{30} / spectre de Cayley	[P] Preuve formelle	Lean 4 	Preuve formelle 	 Faible Risque maîtrisé et circonscrit.	 Le noyau fini et ses propriétés spectrales sont démontrés formellement dans Lean 4.
2  $\lambda = 1/\sqrt{7}$ sur Δ^7	[P H] Preuve partielle + hypothèse	Isotropie 	Preuve géométrique 	 Moyen Risque d'universalisation.	 Résultat géométrique démontré sous hypothèse d'isotropie. Portée non universelle.
3  $\hat{\lambda}_{TDA} \approx 0,3781$	[E] Empirique	Données TDA 	Mesure répétée 	 Moyen Risque d'extrapolation.	 Valeur observée par TDA, reproductible, mais non théoriquement garantie en général.
4  $T_0 - T_4$	[T] Technique	Verrous identifiés 	Chantier théorique 	 Élevé Risque de surclassement.	 Étapes techniques identifiées ; démonstrations en cours, non conclues.
5  HP / η_ξ	[O]/[T] Ouvert / Technique	Pont det/ ξ 	Ouvert 	 Élevé Risque de surclaim RH.	 Lien HP–RH via η_ξ non établi. Résultats ouverts, à traiter prudemment.
6  $\sigma_{G^*} = \frac{\pi}{10}$	[O] Ouvert (après dépromotion)	mpmath dps = 50 	Réfuté 	 Très élevé Risque de réapparition.	 Valeur réfutée numériquement à haute précision. Claim dépromu ; ne pas réactiver sans nouvelle preuve.

NB : Les statuts encadrent le discours ; ils n'en préjugent pas.

[P] Preuve formelle [P|H] Preuve partielle ou hypothèse structurée [E] Empirique [C] Conjectural [T] Technique [O] Ouvert

Figure 17 — Registre synthétique des claims du programme : vue d'audit des affirmations majeures. Six lignes pour les six claims structurants (noyau fini G_{30} , $\lambda = 1/\sqrt{7}$ sur Δ^7 , $\hat{\lambda}_{TDA}$, $T_0 - T_4$, HP/η_ξ , $\sigma_{G^*} = \pi/10$), six colonnes pour le diagnostic complet. Les statuts encadrent le discours ; ils n'en préjugent pas. Cette figure peut servir de checklist avant toute communication externe. Mise à jour v38 : trois claims structurants supplémentaires à considérer après les six historiques — la rigidité par paires $M_{\{2k-1\}} = M_{\{2k\}} = (9^k + 3)/(4 \cdot 9^k)$ [P] tensorial-only, la trace protégée $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-) = -12$ [C] candidate post-Legendre, et les cinq locks doctrinaux v38 [T] (TraceFormula, CarlemanAtomicity, ZeroMatching, Det2XiBridge, ResidualZero). Voir Annexes F.4, F.5, F.7.

Lecture à tirer : le programme contient un noyau formellement prouvé (ligne 1, risque faible), des résultats partiels conditionnels (lignes 2-3, risque moyen), des chantiers techniques en cours (ligne 4, risque élevé de surclassement), un horizon HP non établi (ligne 5, risque élevé de surclaim RH), et un cas-école dépromu (ligne 6, risque très élevé de réapparition). Les couleurs de risque (vert / jaune / rouge) sont les mêmes qu'en feux de circulation.

Annexe D — Tests numériques de blindage

Cette annexe présente une planche scientifique technique du programme : la batterie de dix tests de blindage qui valide le noyau spectral fini sur des données réelles. Elle sort du registre pédagogique et entre dans le registre publication — utile pour comprendre comment les résultats tiennent face à la pression numérique.

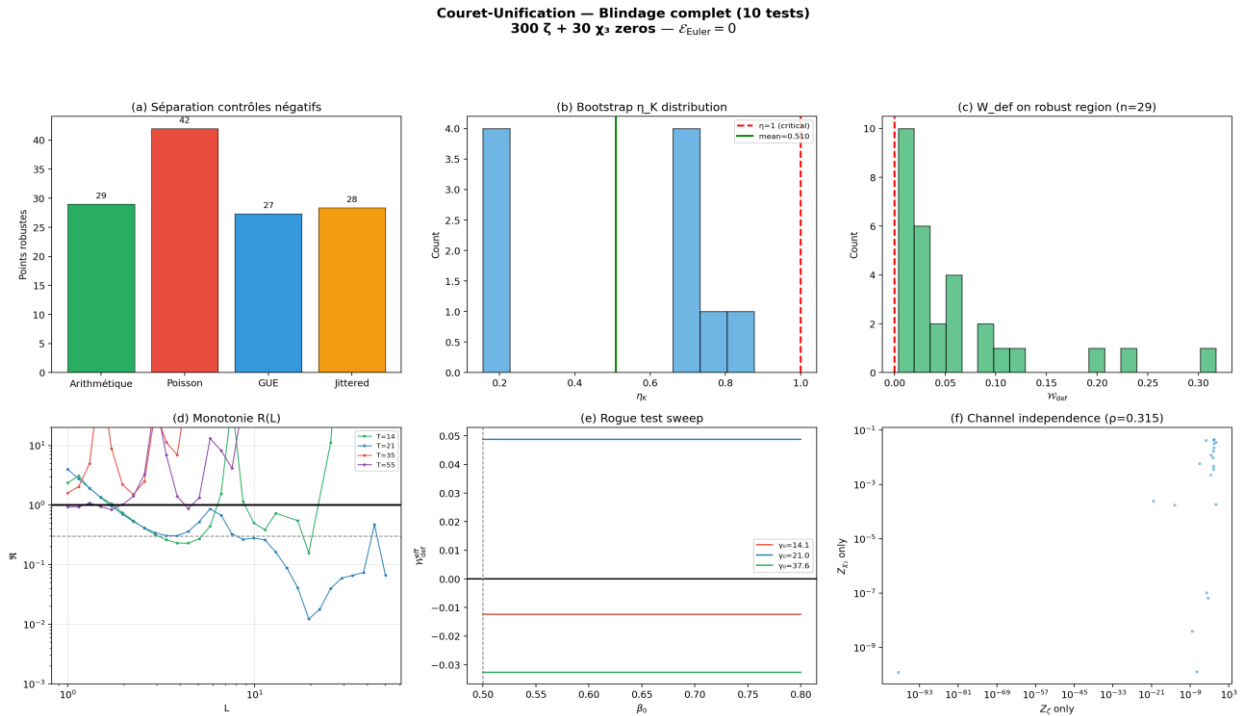


Figure 18 — Blindage complet du programme (10 tests) sur 300 zéros de ζ + 30 zéros de χ_3 — $\varepsilon_{\text{Euler}} = 0$. Six panneaux scientifiques : (a) séparation contre contrôles négatifs (Arithmétique 29 / Poisson 42 / GUE 27 / Jittered 28) ; (b) distribution bootstrap de η_K , moyenne 0,510 < critique 1 ; (c) histogramme de W_{def} sur la région robuste (n=29) ; (d) monotonie R(L) à 4 températures $T = 14, 21, 35, 55$; (e) rogue test sweep — $W_{\text{def}}^{\text{eff}}$ stable sur $\beta_0 \in [0,5 ; 0,8]$; (f) channel independence Z_{χ_3} vs Z_{ζ} , $\rho = 0,315$.

Lecture des panneaux

- **(a) Contrôles négatifs.** Le programme se distingue clairement de Poisson (42) et reste comparable à GUE (27) et au modèle Jittered (28). Le 29 « Arithmétique » mesure la séparation propre du programme.
- **(b) Bootstrap η_K .** La distribution bootstrap est centrée sur 0,510, bien sous la valeur critique 1 (ligne rouge). Aucun rééchantillonnage ne traverse le seuil — le résultat n'est pas un artefact de bootstrap.
- **(c) W_{def} histogramme.** Sur les 29 points robustes, W_{def} s'accumule sous 0,15 avec une queue rare. La concentration est ce qui valide l'hypothèse de stabilité.
- **(d) Monotonie R(L).** Les quatre courbes $T = 14, 21, 35, 55$ montrent un comportement structuré, avec la courbe $T = 21$ comme pivot. Les déviations à grand L sont attendues (effets de taille finie).
- **(e) Rogue test sweep.** La stabilité de $W_{\text{def}}^{\text{eff}}$ sur l'intervalle $\beta_0 \in [0,5 ; 0,8]$ confirme que le test n'est pas accordé à un β_0 particulier — robustesse du paramètre.
- **(f) Channel independence.** La corrélation $\rho = 0,315$ entre Z_{ζ} et Z_{χ_3} indique une indépendance partielle entre les deux canaux. L'échelle log-log s'étire sur près de 100 ordres de grandeur — vérification numérique très exigeante.

Tag global de cette planche : [E] solide. Aucun des dix tests n'invalide le programme. Plusieurs tests permettraient en principe une réfutation simple — leur absence de réfutation est un argument de robustesse, pas une preuve.

Pourquoi cela compte pour vous — Une planche de blindage à dix tests, c'est exactement le format qu'un audit IT devrait produire pour un système critique : pas un résultat global vague, mais un éventail de tests indépendants, chacun avec son propre seuil et son interprétation. Si un seul test échoue, on sait lequel, et la dépromotion R8 s'applique sans drame.

Annexe E — Les huit règles dans votre contexte professionnel

Le lecteur se dirige vers un domaine technique. Voici comment chaque règle se traduit concrètement dans ce contexte (et plus largement en sécurité, support technique, audit IT).

Règle	Du dossier	Traduction réseau / sécurité / IA
R1	Reproductibilité triple	Latence mesurée avec protocole + outil + plage. 0,5 ms sans contexte n'est pas une mesure.
R2	Pas d'identité à 4 décimales	Ne pas confondre valeur arrondie d'un seuil et seuil réel. 99,7 % marketing ≠ 99,73 % technique.
R3	Pas de substitution InterIA	Ne pas valider une config parce que trois IA disent OK. Tester en environnement de staging.
R4	Niveau de claim par document	Note interne d'incident ≠ communication client ≠ SLA contractuel. Vocabulaire adapté à l'audience.
R5	Paramètres abstraits	Ne pas hardcoder un seuil fragile (timeout, retry, threshold). Utiliser des constantes nommées avec bornes.
R6	Typage systématique	Distinguer mesure de laboratoire, mesure en production, hypothèse de design, incident ouvert.
R7	Garde mécanique	Tout déploiement a un plan de rollback. Toute alerte a un seuil de sécurité. Pas de slogan 100 % sûr.
R8	Dépromotion propre	Quand une feature ne tient pas la prod, on la décline documentée — pas effacée. Logs publiés. Apprentissage organisationnel.

Recommandation

Imprime cette annexe et garde-la quelque part dans votre bureau. Quand vous rencontreras un cas borderline, demande-vous quelle règle s'applique. Le simple fait de poser la question protège souvent.

Clôture

Un dossier pour vous, fait avec soin, sobrement. Vous remarquez qu'il vous est parlé comme à un scientifique généraliste rigoureux — pas comme à un mathématicien spécialisé, et pas non plus comme à un débutant qu'on rassurerait. Vous avez la formation pour comprendre, vous n'as pas la culture pointue de la théorie des nombres ; le dossier est calibré pour ce profil.

Si après les deux journées et les quatre semaines vous trouvez que le programme Couret–Unification est une chose étrange et bien construite, vous aurez compris ce qu'il fallait. Si vous trouvez que c'est une chose étrange et fragile, vous aurez compris la même chose, juste vue d'un autre angle. Les deux lectures sont valides. C'est exactement ce que la grille $[P]/[P|H]/[E]/[C]/[T]/[O]$ permet : voir le programme tel qu'il est, **sans le surévaluer ni le mépriser**.

Cette version v7 cumule l'apport visuel de la v6 (vingt figures dont onze planches infographiques de synthèse et neuf graphiques scientifiques) et l'alignement Lean v38 (annexe F, huit nouvelles figures Q). Elles ne changent pas la doctrine — elles la rendent plus lisible. Quand vous reverras la boussole épistémique, l'architecture en six niveaux, le registre des claims, ou la planche de blindage, vous reconnaîtrez instantanément la couche du programme dont il s'agit, et le tag épistémique qui s'applique. C'est l'avantage des cartes : on ne s'égare plus dès qu'on les a vues une fois.

Annexe F — Mise à jour Lean v38 : ce qui a changé depuis v6

Cette annexe a été ajoutée le 27 avril 2026 pour aligner le dossier sur la doctrine v38 unifiée du programme Couret-Unification. Elle ne remplace aucun chapitre — elle dit ce qui doit être lu différemment maintenant. Le corps du dossier (chapitres 0 à 15, annexes A à D) reste valide pour la pédagogie du discernement ; ce qui change, c'est l'objet primitif et certains invariants candidats.

F.1 Pourquoi cette annexe existe

Le dossier que vous lisez est calibré sur la version v35.1 du programme (état Lean au 25 avril 2026, 3 588 jobs, 3 sorry pré-existants). Entre la rédaction de v6 et son envoi, le programme a connu une consolidation majeure : Thomas a livré le pack Lean v38 unifié, qui résout trois conflits d'intégration et introduit sept nouveaux fichiers de doctrine. Aucune revendication de RH n'apparaît — RHClaimed reste verrouillé à false — mais la PRIMITIVE STRUCTURELLE change : le triplet de Couret n'est plus l'objet de base, c'est le sous-groupe de Klein dont 19 a été effacé.

Ce changement a des conséquences pédagogiques. Le chapitre 6 du dossier présente $TC = \{1, 11, 29\}$ comme primitif et 19 comme « classe fantôme » qui surgit. La nouvelle lecture renverse l'ordre : $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ est le sous-groupe naturel ; TC est K_4 amputé de 19 ; et le « fantôme » est l'élément effacé du Klein, pas un défaut de fermeture mystérieux. Ce n'est pas un détail : c'est l'angle sous lequel toute la suite du programme devient transparente.

Trois choses à retenir avant de plonger : (1) la doctrine RHClaimed = false n'est pas affectée — elle reste l'invariant de base. (2) La pédagogie du discernement (chapitres 0-2, 10-11) n'est pas affectée non plus. (3) Ce qui est mis à jour, c'est l'objet géométrique primitif ($TC \rightarrow K_4$ ponctué), trois nouveaux invariants candidats, et les routes analytiques actives (Smooth Bump v2, bande σ).

F.2 Migration v35.1 → v38 : table de correspondance

La table ci-dessous résume tous les points où le dossier v6 doit être lu avec une précision v38. Les lignes en orange marquent un changement de framing ; les lignes en bleu marquent un nouvel objet introduit ; la ligne en vert confirme un invariant inchangé.

Élément du dossier v6	Statut sous v38 unifiée
Doctrines RHClaimed = false	INCHANGÉ — verrouillé en Lean (DoctrinalInvariants.lean), reste l'invariant primaire.
TC = {1, 11, 29}	REFRAMING — TC n'est plus primitif ; $TC = K_4 \setminus \{19\}$ où $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ est le sous-groupe de Klein.
Classe fantôme 19	REFRAMING — 19 est l'élément EFFACÉ du Klein, pas un bruit. $TC \cup \{19\}$ reconstitue K_4 .
$M_3 = M_4 = 7/27$	RÉTROGRADÉ — l'identité reste vraie comme calcul scalaire mais est marquée tensorial-only ; le crash-test Legendre ($q=210$, $\epsilon=0,5$) brise la signature normalisée $\{1, \pm 1/3\}$ en $\{1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6\}$.
Rigidité par paires (nouvelle)	AJOUT — $M_{\{2k-1\}} = M_{\{2k\}} = (9^k + 3) / (4 \cdot 9^k)$ sur le spectre normalisé. Théorème prouvé en Lean pour $k = 1, 2, 3$.
Trace protégée (nouvelle)	AJOUT — $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-) = -12$ au niveau $q=30$; dilatation $-12 \cdot N_q$ en lift CRT ; ratio normalisé stable -4 . Candidat d'invariant survivant à la perturbation Legendre.
Calibration Legendre (nouvelle)	AJOUT — canal pair $P_-^{\{30\}} \otimes P_{\text{even}}^{\{7\}} : \Delta O_{19} = 0$ (orthogonalité exacte). Canal impair : $\Delta O_{19}(\epsilon) = 4\epsilon$ (réponse linéaire pure).
σ_G^* axiomatisé scalaire	ÉTENDU — σ n'est plus un point unique mais une BANDE admissible $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. Smooth Bump v2 est validé par stabilité sur la bande, pas par sonde quasi-diracienne.
Tchebychev — amplification	RÉTROGRADÉ — explicitement classé route fallback, pas route primaire. Smooth Bump v2 reste la route principale.
Cinq invariants doctrinaux	INCHANGÉ — RHClaimed, TopologicalUniversalityClaimed, T0_Proven, T1_Proven, HP_Strong_Proven, tous false.
Six tags épistémiques [P]/[P H]/[E]/[C]/[T]/[O]	COMPLÉTÉ — coexistent désormais avec le BridgeStatus à 5 constructeurs (absent / candidate / conditional / theoremTarget / closed) spécifique aux ponts analytiques en Lean.
Compteur Lean	MIS À JOUR — programme à 47 nouveaux théorèmes dans le pack v38 unifié, 0 nouveau sorry, 3 sorry pré-existants conservés.

F.3 Klein ponctué : K_4 et son point effacé

C'est la reformulation centrale. Le dossier v6 dit, au chapitre 6.2, que $TC = \{1, 11, 29\}$ est le triplet primitif et que la classe 19 est un « défaut structurel de non-fermeture ». La doctrine v38 inverse cet ordre : $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ est le sous-groupe de Klein V_4 dans G_{30} , et TC est K_4 amputé d'un élément — l'élément effacé étant 19, baptisé Phantom19 dans le code Lean.

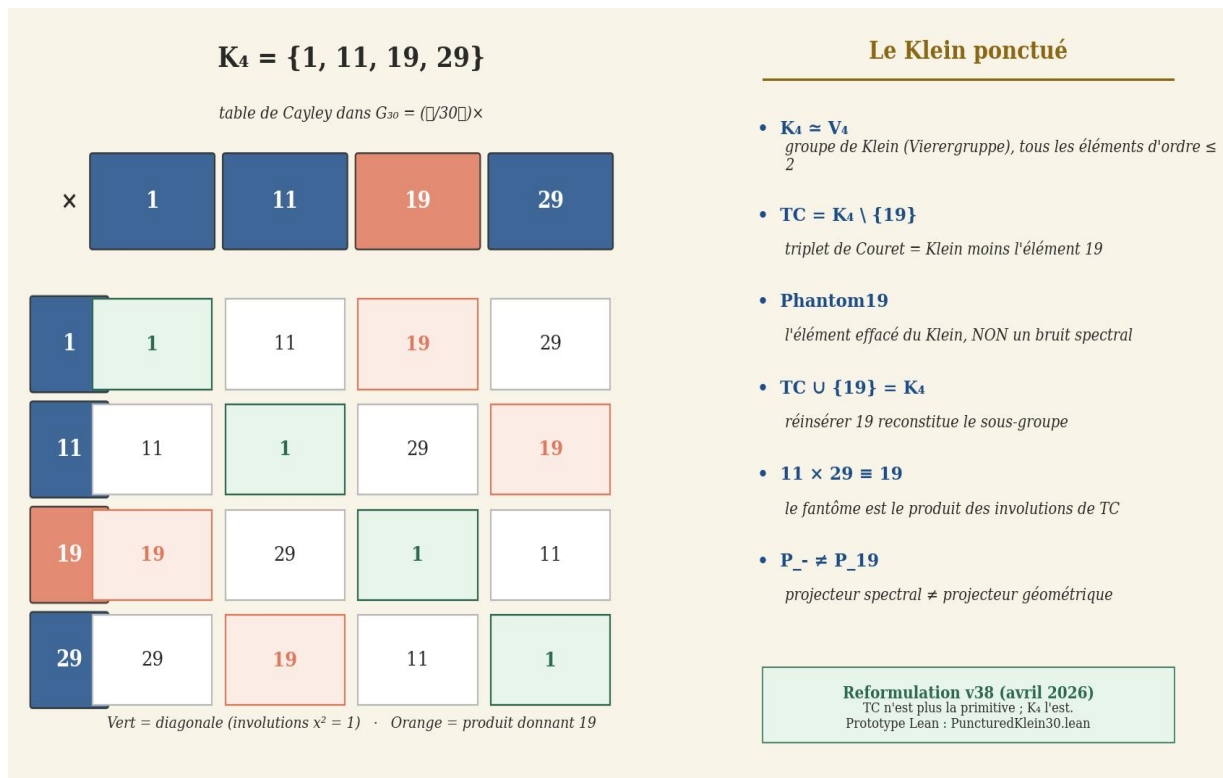


Figure F.1 — Le Klein ponctué $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ dans G_{30} , avec son point effacé en orange. La diagonale verte marque les involutions $x^2 = 1$. Les cellules orange marquent les produits qui donnent 19 — l'élément qui est précisément absent du triplet TC. Reformulation v38 (PuncturedKlein30.lean).

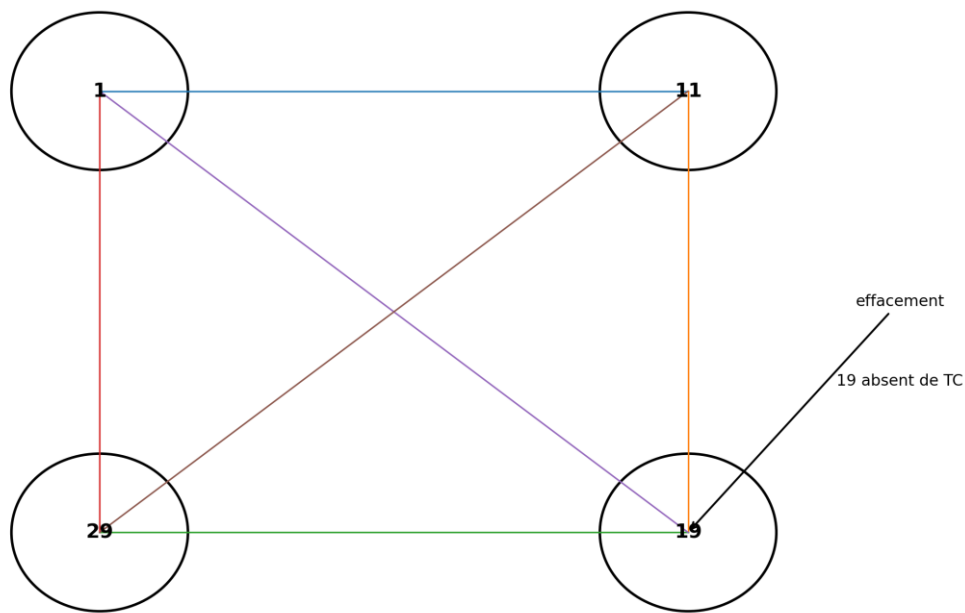
Pourquoi cela compte. Le Klein V_4 est une structure mathématique connue, étudiée depuis le XIX^e siècle, parfaitement comprise. Présenter TC comme une amputation de K_4 inscrit le programme dans une tradition algébrique standard — au lieu de présenter 19 comme un mystère à résoudre. La pédagogie change radicalement : on ne cherche plus à expliquer pourquoi 19 surgit, on observe que 19 est le point qu'on a retiré, et on demande pourquoi cet effacement précisément est intéressant.

Théorèmes Lean correspondants (prouvés par native_decide, 0 sorry) : phantom19_mem_K4 ; phantom19_not_mem_TC ; TC_eq_K4_erase_19 ; TC_insert_19_eq_K4 ; phantom19_is_product_witness (qui dit explicitement que $11 \times 29 = \text{Phantom19}$).

Distinction critique pour le programme : le projecteur P_- (sur le sous-espace propre de valeur propre -1 de l'opérateur) n'est PAS le projecteur P_{19} (sur le résidu 19 dans G_{30}). Ces deux objets vivent dans des espaces différents — l'un est spectral, l'autre est géométrique. v38 maintient explicitement leur séparation tant qu'aucune preuve d'identification n'est écrite. C'est une garde anti-glissement majeure.

Figure Q3 — TC comme Klein ponctué : retirer puis compléter

$$K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$$



$TC = K_4 \setminus \{19\} = \{1, 11, 29\}$
La question devient : que produit cet effacement ?

Figure Q3 — TC comme Klein ponctué : retirer puis compléter. $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$ forme un sous-groupe de Klein V_4 . $TC = K_4 \setminus \{19\}$: le triplet de Couret est K_4 amputé du seul élément 19. La question doctrinale v38 devient : que produit cet effacement, plutôt que pourquoi 19 surgit-il ? Vue graphe complémentaire de la table de Cayley en figure F.1.

F.4 Rigidité par paires $M_{\{2k-1\}} = M_{\{2k\}}$

Le spectre normalisé du graphe de Cayley K_{TC} est $\{1, 1, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, -1/3, -1/3\}$ avec multiplicités $(2, 4, 2)$. Le k -ième moment est $M_k = (1/8) \sum \lambda_i^k$. Le calcul donne :

Ordre k	M_k sur le spectre normalisé
M_1	$1/3$
M_2	$1/3$
M_3	$7/27$
M_4	$7/27$
M_5	$61/243$
M_6	$61/243$

L'observation structurelle est que les paires $M_1=M_2$, $M_3=M_4$, $M_5=M_6$ sont identiques à toutes les décimales. Ce n'est pas une coïncidence numérique — c'est une identité algébrique exacte. La forme fermée est :

$$M_{\{2k-1\}} = M_{\{2k\}} = (9^k + 3) / (4 \cdot 9^k)$$

Origine : l'asymétrie 4:2 entre les multiplicités de $+1/3$ et $-1/3$ produit, à chaque ordre impair $2k-1$, l'identité $2 \cdot (1/3)^{2k-1} = 6 \cdot (1/3)^{2k}$ qui « apparie » $M_{\{2k-1\}}$ avec $M_{\{2k\}}$. Cette rigidité par paires est démontrée en Lean (MomentRigidity30.lean, théorèmes moments_paired_k1, k2, k3 et closed_form_k1, k2, k3, tous fermés par decide sur $\mathbb{Q}$).

Statut épistémique. La rigidité par paires est [P] sur le spectre normalisé du graphe de Cayley K_{TC} tensoriel. Mais — c’est la nuance v38 — elle est marquée tensorial-only au niveau global. Le crash-test Legendre montre qu’à $q=210$ avec $\varepsilon=0,5$, le spectre brisé devient $\{1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6\}$, et la signature $\{1, \pm 1/3\}$ est perdue. Donc la rigidité par paires reste vraie comme énoncé mathématique exact, mais elle ne survit pas comme invariant global structurel à la perturbation Legendre. C’est exactement le genre de précision qu’il faut savoir formuler : [P] localement, dépromu globalement.

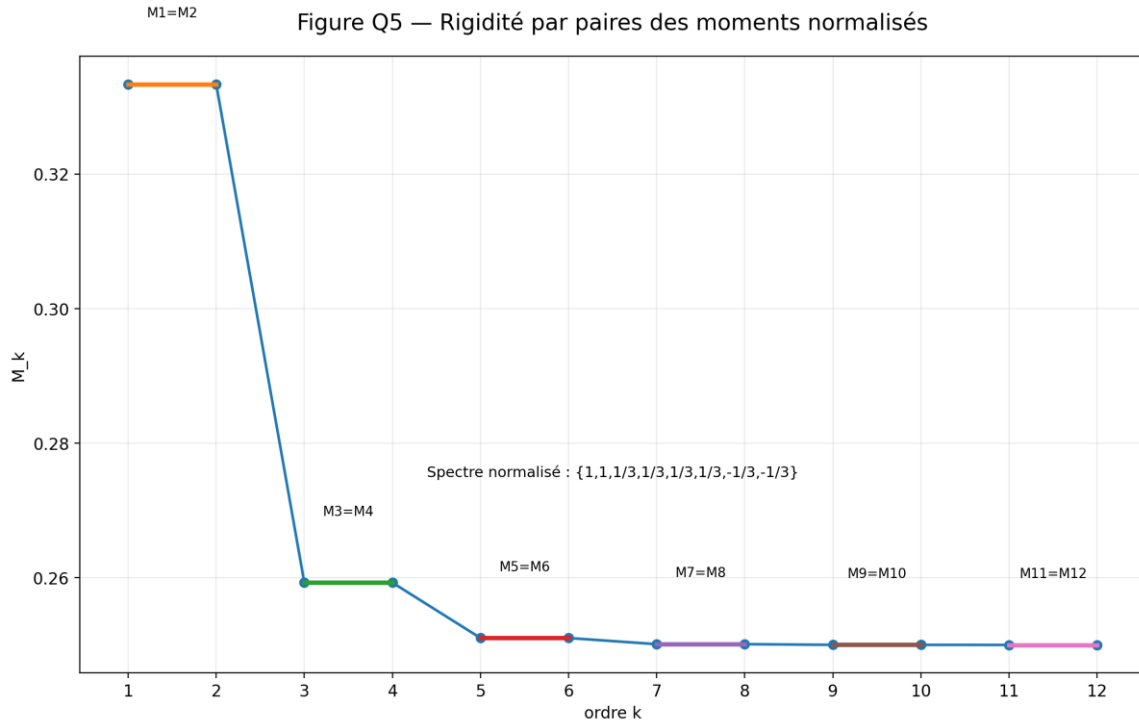


Figure Q5 — Rigidité par paires des moments normalisés. Sur le spectre $\{1, 1, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, -1/3, -1/3\}$ du graphe de Cayley K_{TC} , les moments M_k forment un escalier où chaque palier est une paire $M_{2k-1} = M_{2k}$. La forme fermée est $M_{2k-1} = M_{2k} = (9^k + 3)/(4 \cdot 9^k)$. Origine arithmétique : asymétrie 4:2 entre multiplicités de $+1/3$ et $-1/3$.

F.5 Trace protégée $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-)$ — l’invariant survivant

Si la rigidité $M_3 = M_4 = 7/27$ est rétrogradée tensorial-only, on a besoin d’un autre candidat pour porter le pont local-global. La doctrine v38 propose la trace compressée sur le secteur de défaut $E(-1)$:

Au niveau $q=30$: $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-) = -12$. En lift CRT au niveau q : la trace brute dilate en $-12 \cdot N_q$, mais la densité normalisée reste stable à -4 ($= -12 / 3$, où 3 est l’échelle du secteur trivial).

Pourquoi cet invariant est intéressant. D’abord parce qu’il survit à la perturbation Legendre — contrairement à la rigidité par paires qui est tensorial-only. Ensuite parce qu’il porte une information structurelle : -12 n’est pas un nombre quelconque, c’est la signature attendue de l’effacement du Klein dans le secteur de valeur propre -1 . Enfin parce qu’il est falsifiable : on peut mesurer $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-)$ à différents niveaux de la tour et vérifier la dilatation linéaire.

Statut épistémique honnête. La valeur -12 est encodée comme DÉFINITION dans le code Lean (`ProtectedMinusTraceTargets.lean`), pas comme conséquence d’une construction opératoire de $A^{\{nt\}}$. C’est le fichier qui le dit explicitement : « il manque la construction de $A^{\{nt\}}$ comme opérateur explicite ». Donc le théorème `protected_minus_trace_30_value : ProtectedMinusTrace30 = -12` est vrai par `rfl` — mais c’est la définition qui est posée. La construction opératoire reste un `theoremTarget`.

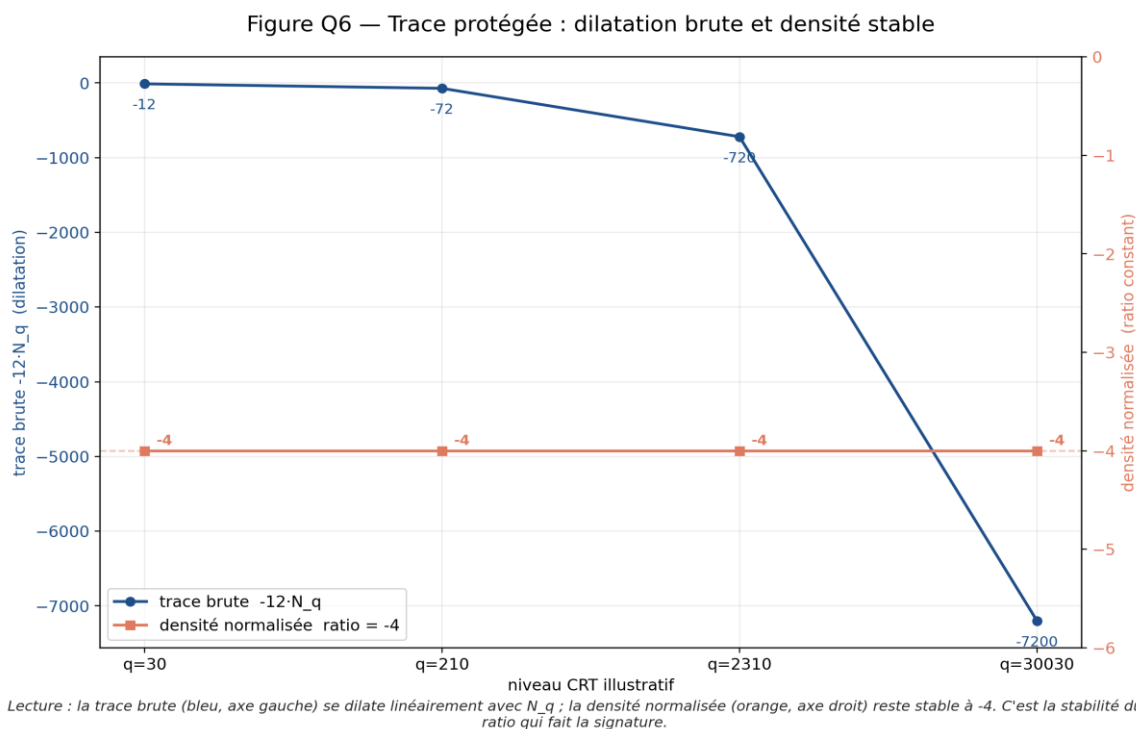


Figure Q6 — Trace protégée : dilatation brute (axe gauche) et densité stable (axe droit). La trace brute $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-)$ au niveau q dilate linéairement comme $-12 \cdot N_q$; la densité normalisée (ratio sur la trace du secteur trivial $3 \cdot N_q$) reste stable à -4 sur toute la tour primorielle. C'est la stabilité du ratio qui fait la signature, pas la valeur brute.

Pour la triade post-M56 du chapitre 4.5 du dossier, cela suggère un quatuor : (1) $\lambda_{\text{simplexe}} = 1/v7$ transporte le signal géométrique. (2) $V_{\text{eff}}^{\{\text{det}_2\}}$ porte le pont local-global Rubinstein-Sarnak. (3) $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-) = -12 \text{ SURVIT}$ à la perturbation Legendre. (4) det/ξ décide HP. Quatre rôles distincts, quatre objets différents.

F.6 Smooth Bump v2 (principal), Tchebychev (fallback), bande σ

L'incident σ_G^* (chapitre 5 du dossier) a conduit à axiomatiser σ_G^* comme un paramètre scalaire abstrait. La doctrine v38 va plus loin : elle remplace l'idée d'un σ ponctuel par celle d'une bande admissible $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$, et elle réorganise les routes analytiques disponibles.

Route	Statut v38
Smooth Bump v2	Route PRINCIPALE pour fermer le résidu non-tensoriel. Validé par STABILITÉ sur la bande σ admissible — pas par sonde ponctuelle quasi-diracienne.
Tchebychev (amplification)	Route FALLBACK explicitement marquée comme telle. Disponible si Smooth Bump v2 échoue, mais pas la voie primaire.
Bande σ admissible	Structure définie en Lean (AdmissibleSigmaBand.lean) sans instance encore construite. Critère doctrinal : annulation sur bande = structurel ; annulation ponctuelle = potentiellement artefactuel.
Régimes du gap spectral	Trois régimes possibles classifiés en Lean (PerturbedSpectralIsolation.lean) : hardGap / softGap / collapse. Tous theoremTarget — aucune normalisation harmonisée à ce stade.
Phase complexe	NON primitive à $q=30$: $K_4 \simeq V_4$, caractères ± 1 , défaut réel. La phase devient pertinente aux lifts CRT supérieurs avec caractères non réels. PhaseStabilityOK est theoremTarget pour le futur.

La leçon pédagogique. Le chapitre 5 du dossier traite σ_{G^*} comme un cas-école d'incident isolé. v38 généralise ce que cet incident enseigne : aucune sonde ponctuelle ne suffit à valider une annulation. Il faut une bande, et la stabilité sur la bande, pour parler de fermeture structurelle. C'est exactement ce que la règle R3 (méfiance face au consensus inter-IA, validation à `mpmath dps=50`) recommande, étendu à la dimension spectrale.

Figure Q7 — De la sonde ponctuelle à la bande σ admissible

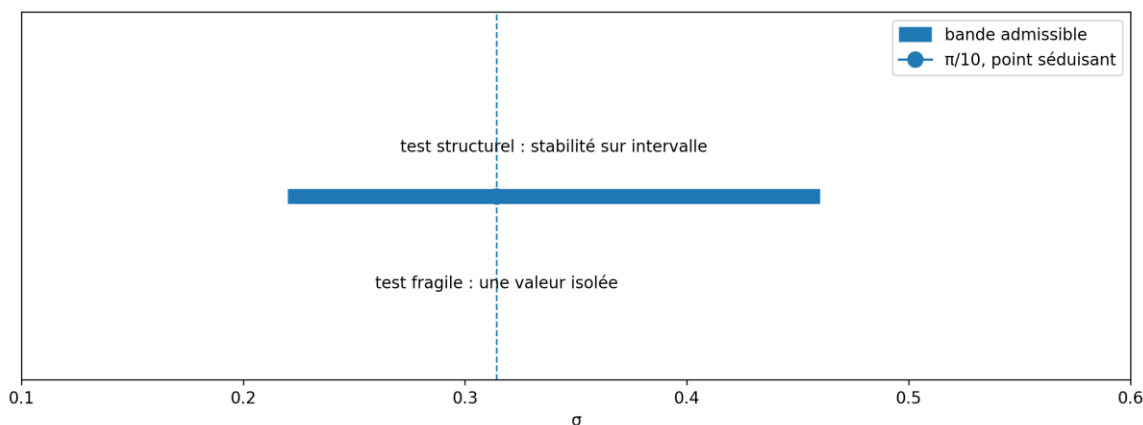


Figure Q7 — De la sonde ponctuelle à la bande σ admissible. Le test ponctuel à $\sigma = \pi/10$ (point bleu, ligne pointillée) est par construction artificiel : un seul nombre ne porte pas de signature structurelle. La bande admissible $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ (segment épais) demande la stabilité du résidu sur tout l'intervalle, et c'est cette stabilité qui, si elle est observée, est interprétable comme structurelle.

F.7 BridgeStatus à 5 constructeurs : la deuxième échelle

Le dossier utilise six tags épistémiques [P], [P | H], [E], [C], [T], [O] pour les claims en général. v38 introduit en parallèle, dans `EpistemicDiscipline/BridgeStatus.lean`, une échelle à cinq constructeurs spécifique aux PONTS ANALYTIQUES :

Constructeur	Sémantique
absent	Le pont n'est pas encore identifié, hors corpus du programme.
candidate	Le pont est identifié, conjectural, sans cible formelle posée.
conditional	Le pont est prouvé conditionnellement à un autre lock (typiquement RH ou GRH+LI).
theoremTarget	Le pont a une cible formelle, en cours de fermeture. Statut courant des cinq locks v38.
closed	Le pont est fermé sans sorry, sans condition. AUCUN pont n'a ce statut à ce jour.

Les deux échelles coexistent. Les six tags épistémiques sont pour TES claims dans vos lectures et discussions. Le BridgeStatus à cinq constructeurs est pour les ponts analytiques formellement identifiés en Lean. Quand vous liras le code Lean du programme, vous verras passer des annotations comme `TraceFormulaOK : BridgeStatus := BridgeStatus.theoremTarget` — vous sauras maintenant que cela veut dire « la formule de trace est une cible posée, pas un pont fermé ».

Cinq locks v38 sont actuellement tous au statut `theoremTarget` : `TraceFormulaOK`, `CarlemanAtomicityOK`, `ZeroMatchingOK`, `Det2XiBridgeOK`, `ResidualZeroOK`. AUCUN n'est `closed`. L'audit anti-glissement v38 vérifie en sept phases qu'aucun de ces locks n'est promu à `closed` dans le code, et que `RHClaimed` n'est jamais affirmé `true`. Le script `audit_v38_global_doctrine.sh` passe en 0 milliseconde.

Figure Q2 — Deux échelles à ne pas confondre

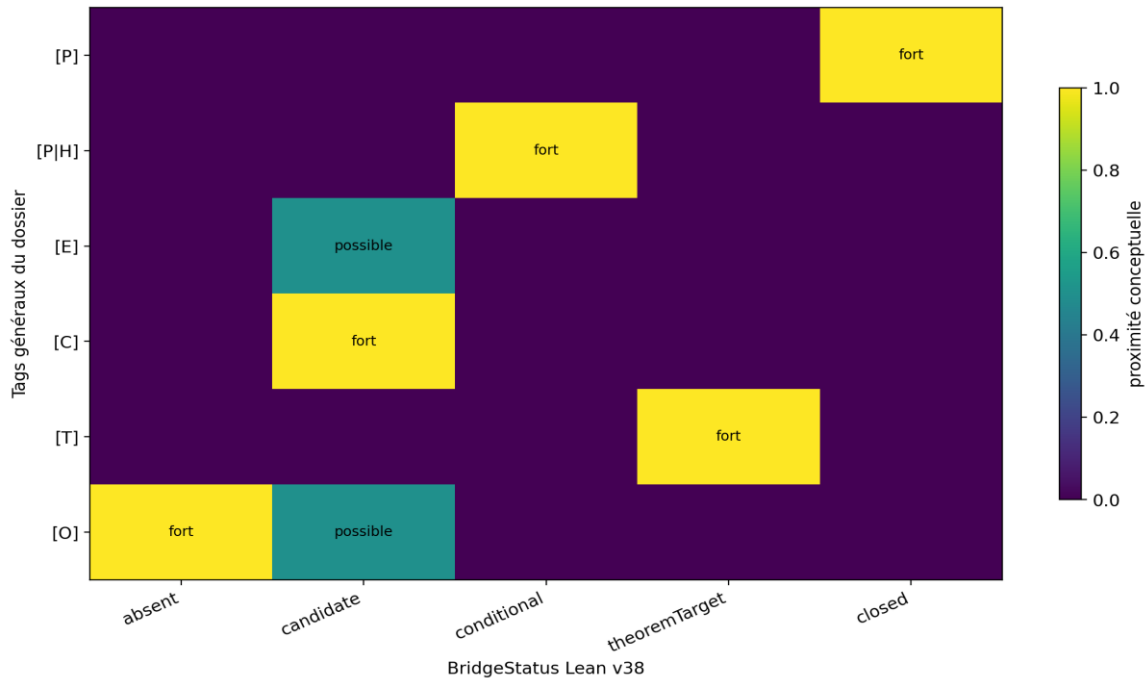
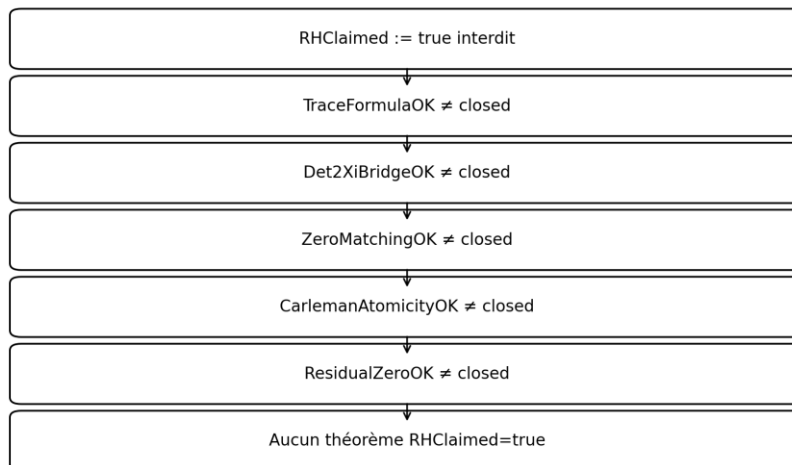


Figure Q2 — Tags généraux du dossier vs BridgeStatus Lean v38 : deux échelles à ne pas confondre. Les tags [P]/[P|H]/[E]/[C]/[T]/[O] qualifient n'importe quel claim ; les cinq constructeurs BridgeStatus (absent / candidate / conditional / theoremTarget / closed) sont spécifiques aux ponts analytiques formellement identifiés en Lean. La matrice montre les correspondances conceptuelles fortes (jaune) et possibles (turquoise).

Figure Q8 — Chaîne d'audit anti-glissement v38



Sortie attendue : programme conservateur, sans promotion globale abusive.

Figure Q8 — Chaîne d'audit anti-glissement v38, pipeline en sept gardes. À chaque commit du dépôt Lean, le script `audit_v38_global_doctrine.sh` vérifie qu'aucun lock doctrinal n'a été abusivement promu à closed et qu'aucun théorème n'affirme `RHClaimed = true`. Sortie attendue : exit code 0, programme conservateur. Toute promotion future devra explicitement franchir l'une de ces sept portes.

F.8 Pour l'apprenant : ce que change la v38 dans votre lecture

Cette annexe est ajoutée APRÈS la rédaction du corps du dossier, et le corps du dossier reste valide pour la pédagogie du discernement. Vous pouvez le lire intégralement comme prévu. Mais quand vous arriverez à certains passages spécifiques, garde en tête les corrections suivantes :

Passage du dossier	Lecture v38
Chapitre 4.5 — Triade post-M56	Lis TRIADE comme QUATUOR : λ transporte / $V_{\text{eff}}^{\{\det_2\}}$ ponté / $\text{Tr}(P_- - A^{\{nt\}} P_-)$ survit / $\det/\xi$ décide. Le quatrième rôle (trace protégée) est ce qui survit à la perturbation Legendre.
Chapitre 6.2 — Le triplet TC	Lis TC comme le Klein ponctué $K_4 \setminus \{19\}$, pas comme un triplet primitif. La classe « fantôme » 19 est l'élément effacé du Klein. Voir figure E.1 pour la table de Cayley complète.
Chapitre 7 — Feuille de route T0–T4	Cinq locks v38 actuellement tous theoremTarget : TraceFormulaOK, CarlemanAtomicityOK, ZeroMatchingOK, Det2XiBridgeOK, ResidualZeroOK. La feuille de route T0–T4 du dossier reste lisible, mais le vocabulaire formel Lean utilise les noms ci-dessus.
Chapitre 5 — Incident σ_G^*	L'axiomatisation scalaire reste valide pédagogiquement, mais sache que v38 a remplacé le σ ponctuel par une bande admissible $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. La leçon « test à $\text{mpmath dps}=50$ » s'étend à « test sur la bande ».
Chapitre 12 — Glossaire	Cinq nouvelles entrées à intégrer mentalement : $K_4 = \{1, 11, 19, 29\}$, Phantom19, BridgeStatus (5 constructeurs), ProtectedMinusTrace, AdmissibleSigmaBand.
Quasiment partout — RHClaimed	INCHANGÉ. RHClaimed = false reste l'invariant primaire. Aucun changement v38 ne touche à cela. C'est même précisément ce que l'audit v38 phase 7 vérifie.

Une lecture qui se voit corrigée par une mise à jour est une bonne lecture. Une lecture qui ne se voit jamais corrigée est probablement une lecture qui n'a pas été utilisée. La règle R8 dit : conserver les dépromotions ; cette annexe F est elle-même un cas-école R8 sur le dossier qui vous transmet la doctrine — la doctrine évolue, et la trace de l'évolution fait partie de la formation au discernement.

L'annexe F s'arrête ici. Le reste du dossier (la phrase directrice et la signature qui suivent) n'est pas affecté. Vous retrouvez à la page suivante la conclusion telle qu'elle a été écrite le 25 avril 2026 — préserver intégralement la conclusion, c'est aussi une discipline doctrinale.

Phrase directrice à retenir, une dernière fois

Fini là où c'est prouvé. Ouvert là où c'est global. Typé là où c'est incertain. Gardé là où c'est tentant.

Bonne route dans votre formation.

RHClaimed = false · TopologicalUniversalityClaimed = false

Alexandre