

Note $K^P.2$ — Résultats des tests numériques sur le candidat (a)

Programme Couret-Unification · Note technique Date : 19 mai 2026 **Statut global** : [P] probatoire avec dépromotion partielle ([F]) du candidat (a) naïf **Auteur** : Alexandre Couret (Rasiguères, France)

Sceau doctrinal

RHClaimed = false
HilbertPolyaClaimed = false
Det2IdentityClaimed = false
GoldbachProofClaimed = false
EngineeringVerdictClaimed = false
ScopeExpansionClaimed = false

§1 Cadre et objet

Cette note rapporte les tests numériques exécutés en suite immédiate à la note K^P initiale. L'objet est d'évaluer empiriquement le candidat (a) Cayley local pour B_p , dans ses différentes conventions de choix de T_p , et de vérifier si TD4 (anti-tautologie) peut être passé asymptotiquement.

Conventions testées : - **V1 = QR** : $T_p = \{1, 2, \nu_p\}$ avec ν_p plus petit non-résidu quadratique - **V2 = GEN** : $T_p = \{1, g, g^2\}$ avec g plus petit générateur de G_p - **V3 = COURET** : $T_p = \{1, 11 \bmod p, 29 \bmod p\}$ (transposition naïve) - **V4 = SYM** : $T_p = \{1, k, p - k\}$ avec k canonique

Premiers testés : $p \in [7, 500]$, 92 premiers.

Précision : flottants double précision (NumPy). Pour vérifications critiques, comparaison à 10^{-12} .

§2 Acquis [D-finite] — formules fermées vérifiées

2.1 Norme Hilbert-Schmidt — formule exacte

Résultat [D-finite] (énumération exhaustive sur 92 premiers, 4 conventions) :

$$\boxed{\|\tilde{B}_p\|_{HS}^2 = (p-4)/(3)}$$

identiquement pour tout triplet $T_p = \{1, a, b\}$ avec $a, b \in G_p$ distincts de 1 et entre eux.

Vérification : pour $p \in \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$, valeurs prédites $(p-4)/3 \in \{1, 7/3, 3, 13/3, 5, 19/3, 25/3, 9, 11, 37/3\}$ — coïncidence exacte à 10^{-15} près sur les 92 premiers testés.

Démonstration (esquisse) : sur G_p cyclique, $\text{Tr}(A_T^2) = (p-1) \cdot |T| = 3(p-1)$ (chaque élément de G_p contribue $|T|$ paires "boomerang"). Après centrage $A_T \mapsto A_T - (|T|/(p-1))J$ et normalisation par $|T| = 3$: $\|B_p\|_{HS}^2 = 1/9[\text{Tr}(A_T^2) - 9] = 1/9[3(p-1) - 9] = (p-4)/(3)$.

Statut : promu de borne conservatrice [O] à formule exacte [D-finite] par énumération.

2.2 Convergence Hilbert-Schmidt

Corollaire : sous le candidat (a) Cayley local avec $|T_p| = 3$, l'opérateur $K_\eta^p(s) = \oplus_p p^{-(s+\eta)} B_p$ vérifie : $\|K_\eta^p(s)\|_{HS}^2 = \sum_p p^{-2\text{Re}(s+\eta)} \cdot (p-4)/(3) \sim 1/3 \sum_p p^{1-2\text{Re}(s+\eta)}$.

Convergence : la série $\sum_p p^{1-2\sigma}$ converge ssi $2\sigma - 1 > 1$, soit $\sigma > 1$.

Sur la droite critique $Re(s) = 1/2$: convergence Hilbert-Schmidt ssi $Re(\eta) > 1/2$.

Statut : $[D\text{--}math]$. Levée définitive du sous-verrou $\neg\text{REG}$ sous le candidat (a) avec $|T_p| = 3$: la condition est $Re(\eta) > 1/2$, sans possibilité d'amélioration via raffinement du triplet (puisque la borne est exacte, pas conservatrice).

2.3 Spectre singulier — borne uniforme

$\|B_p\|_{op} \leq 1$ uniformément, observé sur les 92 premiers (médiane $\approx 0,998$, min $\approx 0,58$ pour cas SYM avec $k = 2$).

§3 Résultat négatif — violation asymptotique de TD4

3.1 Test d'invariance des traces

Pour les conventions QR, GEN, SYM appliquées sur $p \geq 19$: les contributions individuelles au résidu $D_{K^p}(s)$ sont **identiques à la précision machine** (10^{-12} à 10^{-17}).

Tableau (extrait, $\eta = 0,3$, $s = 1/2 + 30i$) :

p	$ D_{QR}(p) $	$ D_{GEN}(p) $	$ D_{SYM}(p) $	diff
11	$1,10 \times 10^{-1}$	$9,64 \times 10^{-3}$	$9,58 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-1}$
13	$1,45 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-2}$	$5,2 \times 10^{-4}$
17	$1,99 \times 10^{-2}$	$2,47 \times 10^{-2}$	$2,51 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-3}$
19	$2,56 \times 10^{-2}$	$2,56 \times 10^{-2}$	$2,56 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-6}$
23	$2,96 \times 10^{-2}$	$2,96 \times 10^{-2}$	$2,96 \times 10^{-2}$	0
29	$3,25 \times 10^{-2}$	$3,25 \times 10^{-2}$	$3,25 \times 10^{-2}$	$3,5 \times 10^{-10}$
31	$3,28 \times 10^{-2}$	$3,28 \times 10^{-2}$	$3,28 \times 10^{-2}$	$4,2 \times 10^{-7}$
53	$3,33 \times 10^{-2}$	$3,33 \times 10^{-2}$	$3,33 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-5}$
89	$2,98 \times 10^{-2}$	$2,98 \times 10^{-2}$	$2,98 \times 10^{-2}$	$1,3 \times 10^{-17}$

3.2 Test de coupe inférieure

Différence relative maximale entre conventions D_{QR} , D_{GEN} , D_{SYM} en fonction du premier minimal inclus dans la somme :

p_{min}	diff. rel. max	nb premiers
7	$2,56 \times 10^{-1}$	92
11	$2,61 \times 10^{-1}$	91
13	$1,78 \times 10^{-2}$	90
17	$1,86 \times 10^{-2}$	89
19	$7,73 \times 10^{-5}$	88
23	$8,44 \times 10^{-5}$	87
29	$9,49 \times 10^{-5}$	86
37	$1,06 \times 10^{-4}$	84
53	$1,00 \times 10^{-4}$	80

Observation clé : la différence relative chute par un facteur **~14** quand on enlève $p = 11$, puis par un facteur **~200** quand on enlève $p \leq 17$. Pour $p_{\min} \geq 19$, la différence relative entre conventions devient $\approx 10^{-4}$ — résiduelle, pilotée uniquement par les contributions de $p = 11, 13, 17$.

3.3 Test de variation à p fixé

Pour $p = 31$, 14 triplets symétriques $\{1, k, p - k\}$ avec $k \in \{2, \dots, 15\}$: - $Tr(B_p^2) = 7/3$ **strictement constant** (range = $1,47 \times 10^{-14}$, précision machine). - $Tr(B_p^3)$ varie : 12 triplets sur 14 donnent 0, 111 ; les 2 exceptions ($k = 5, 6$, soit $T = \{1, a, -a\}$ avec $a^2 \equiv 25 \pmod{31}$) donnent 4, 556.

3.4 Diagnostic TD4

Verdict : TD4 est **violé asymptotiquement** pour le candidat (a) avec $|T_p| = 3$.

La “discrimination” apparente entre conventions QR, GEN, SYM (corrélation $\sim 0,73$ en faible η , diff rel $\sim 0,5$) est entièrement portée par les **trois premiers $p = 11, 13, 17$** . Au-delà, toutes les conventions donnent strictement la même contribution.

Mécanisme structurel : pour G_p cyclique d’ordre $p - 1$, l’action du groupe d’automorphismes $Aut(G_p) \cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times$ sur les sous-ensembles $\{1, a, b\}$ contenant 1 est *quasi-transitive* pour p grand : presque tous les triplets sont équivalents par automorphisme. Donc $Tr(B_p^m)$ ne dépend, asymptotiquement, **que de la cardinalité** $|T_p| = 3$, et non du choix particulier des éléments.

Comparaison avec le cas $K^\#$: F.7 inscrivait la violation de TD4 sur des triplets de contrôle dans G_{30} , avec écart relatif $\sim 2,5 \times 10^{-4}$. La présente note retrouve une structure analogue pour K^p , avec écart relatif résiduel $\sim 10^{-4}$ pour $p_{\min} \geq 19$.

3.5 Inscription F.8

Inscription au journal des falsifications :

F.8 — Tautologie asymptotique du candidat (a) Cayley local avec $|T_p| = 3$ pour la voie K^p .

Mécanisme : énumération exhaustive sur 92 premiers et 4 conventions canoniques de choix de T_p . Formule fermée $\|B_p\|_{HS}^2 = (p-4)/3$ identiquement. Test de coupe inférieure montrant que toute discrimination entre conventions vient des trois premiers $p = 11, 13, 17$.

Mécanisme structurel : action quasi-transitive de $Aut(G_p) \cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times$ sur les triplets contenant 1 pour p grand.

Statut : candidat (a) avec $|T_p| = 3$ fixé est dépromu pour la voie K^p .

Conséquence : le sous-verrou $\neg\text{DEF}$ (choix canonique de T_p) ne peut être levé par aucune convention dans la classe $|T_p| = 3$.

Leçon : La cardinalité fixe $|T_p| = 3$ est insuffisante pour produire une médiation différenciante (TD2 + TD4) ; toute discrimination s’efface dans la limite primorielle.

§4 Découverte structurelle — sous-groupes d’ordre 3

4.1 Cas particulier des sous-groupes

Quand $3 \mid p - 1$, G_p contient un unique sous-groupe d’ordre 3 : $H_p = \{1, \omega, \omega^2\}$ où $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$.

Pour ces premiers (densité asymptotique $1/2$ par Dirichlet), B_{H_p} a une structure particulière :

Proposition [D-finite] : si $T_p = H_p$ sous-groupe d'ordre 3, alors B_{H_p} est un **projecteur orthogonal** sur l'espace des fonctions H_p -invariantes centrées.

Conséquence immédiate : $B_{H_p}^k = B_{H_p}$ pour tout $k \geq 1$. Donc : $Tr(B_{H_p}^k) = Tr(B_{H_p}) = (p-4)/3$ pour tout $k \geq 1$.

Vérification numérique : pour $p \in \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97\}$ — coïncidence exacte $Tr(B_{H_p}^2) = Tr(B_{H_p}^3) = (p-4)/3$.

4.2 Discrimination par sous-groupe vs générique

Pour les premiers avec $3 \mid p-1$, comparaison des traces sous deux choix de T_p :

p	$T_p = H$ (sous-groupe)	$Tr(B_H^3)$	$T_p = \{1, 2, 3\}$ générique	$Tr(B_{gen}^3)$
7	$\{1, 2, 4\}$	1,000	$\{1, 2, 3\}$	-0,556
13	$\{1, 3, 9\}$	3,000	$\{1, 2, 3\}$	-0,111
19	$\{1, 7, 11\}$	5,000	$\{1, 2, 3\}$	-0,333
31	$\{1, 5, 25\}$	9,000	$\{1, 2, 3\}$	0,111
37	$\{1, 10, 26\}$	11,000	$\{1, 2, 3\}$	0,333
43	$\{1, 6, 36\}$	13,000	$\{1, 2, 3\}$	0,556
67	$\{1, 29, 37\}$	21,000	$\{1, 2, 3\}$	1,444
97	$\{1, 35, 61\}$	31,000	$\{1, 2, 3\}$	2,556

Diff structurelle : pour $m \geq 3$, les sous-groupes donnent $Tr(B_H^m) = (p-4)/3 \sim p/3$, tandis que les triplets génériques donnent $Tr(B_{gen}^m) = O(1)$ centré autour de 0.

4.3 Piste alternative $K^{p,sub}$

Définition tentative : $K_{M,\eta}^{p,sub}(s) = \bigoplus_{p \leq p_M, 3 \mid p-1} p^{-(s+\eta)} B_{H_p}$.

Propriétés observées : - Restriction au sous-ensemble des premiers p avec $3 \mid p-1$ (densité $1/2$). - Pour ces p , B_{H_p} est un projecteur, structure très contrainte. - Les traces des puissances diffèrent **structurellement** d'un choix générique.

Problèmes ouverts : - $K^{p,sub}$ ne couvre que la moitié des premiers. La structure des p avec $3 \nmid p-1$ (par exemple $p = 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89$) n'est pas traitée. Sous-groupes d'ordre 2 ($\{1, -1\}$) trivialement disponibles, mais $|T_p| = 2$ change la structure de toute l'analyse. - TD4 pour $K^{p,sub}$ n'a pas été testé. Il faudra comparer plusieurs ordres de sous-groupes (3, 5, 7) selon la divisibilité. - L'analogie avec les caractères de Dirichlet primitifs (au lieu de la simple structure mod p) suggère une voie alternative encore plus structurée : **caractères cubiques** pour les p avec $3 \mid p-1$.

Statut : $K^{p,sub}$ inscrit comme $[O]$ avec cahier des charges à préciser. **Pas de promotion.**

§5 Bilan et inscriptions au registre

5.1 Sous-verrou $\neg REG$

Statut : levé. La régularité Hilbert-Schmidt est démontrée par formule fermée pour $Re(\eta) > 1/2$.

Promotion : C-035 passe de $[C]$ (conditionnel) à $[D\text{--}finite]$ (vérifié par énumération sur 92 premiers, avec démonstration analytique de la formule fermée).

5.2 Sous-verrou $\neg DEF$

Statut : **non levé**, et désormais structuré par F.8. Toute convention de choix de T_p dans la classe $|T_p| = 3$ est **équivalente asymptotiquement**. $\neg DEF$ ne se résout pas par choix canonique dans cette classe.

Dépromotion : C-033 (candidat (a) avec $|T_p| = 3$ priorité 1) passe de $[P]$ à $[F]$ avec leçon documentée.

5.3 Voie K^p globale

Statut : $[O]$ maintenu. Le candidat (a) avec $|T_p| = 3$ est dépromu, mais le candidat alternatif (a') sous-groupe structurel reste à examiner.

Nouvelle inscription : C-036 — « candidat (a') $K^{p,sub}$ avec T_p sous-groupe d'ordre 3 quand $3 \mid p - 1$ », statut $[O]$.

5.4 Tableau récapitulatif des inscriptions

Identifiant	Avant tests	Après tests
C-033	$[P]$ candidat (a) priorité 1	$[F]$ par F.8
C-034	$[O]$ $\neg DEF$ structuré	$[F]$ pour classe $ T_p = 3$
C-035	$[C]$ $\neg REG$ conditionnel	$[D\text{--}finite]$ formule fermée $\ B_p\ _{HS}^2 = (p-4)/3$
C-036 (nouveau)	—	$[O]$ candidat (a') sous-groupe
F.8 (nouvelle)	—	Tautologie asymptotique candidat (a)

5.5 Forbidden statements explicites

- « La voie K^p sous Cayley local avec $|T_p| = 3$ passe TD4. » — **Falsifié par F.8.**
- « Le choix canonique de T_p change le résidu D_{K^p} asymptotiquement. » — **Falsifié par F.8.**
- « Le candidat (a) $|T_p| = 3$ est la bonne voie K^p . » — **Falsifié par F.8.**

§6 Conclusion et perspective

6.1 Acquis nets

1. **Régularité K^p -REG levée** sous le candidat (a) $|T_p| = 3$ pour $Re(\eta) > 1/2$: formule fermée $\|B_p\|_{HS}^2 = (p-4)/3$ démontrée. $[D\text{--}finite]$.
2. **Tautologie asymptotique TD4** établie pour ce même candidat. $[D\text{--}finite] + [F]$ pour le candidat (a) naïf.
3. **Mécanisme structurel identifié** : action quasi-transitive d' $Aut(G_p)$ sur les triplets pour p grand. $[H]$ structurel, à formaliser.
4. **Piste alternative ouverte** : candidat (a') sous-groupe structurel. $[O]$.

6.2 Position épistémique

Le candidat (a) naïf $|T_p| = 3$ est éliminé proprement, avec mécanisme structurel identifié,

par 92 calculs exacts. Ce n'est pas un échec ; c'est l'application réussie de la discipline du programme à un cas concret. La voie K^p globale n'est pas fermée par ce résultat — elle est précisée, et son cahier des charges devient explicite : il faut un candidat structurel, pas un candidat combinatoire arbitraire.

6.3 Prochaines étapes

1. **Examen du candidat (a') sous-groupe** : tester $K^{p,sub}$ avec $T_p = H_p$ sous-groupe d'ordre 3 (pour p avec $3 \mid p - 1$) et structure parallèle pour les autres p .
2. **Caractères cubiques** : examiner la voie *via* caractères de Dirichlet cubiques de G_p , dont le support de Dirichlet sur les fréquences eulériennes est canoniquement structuré.
3. **Formalisation Lean 4** de la formule fermée $\|B_p\|_{HS}^2 = (p-4)/3$: module `Core.KpHilbertSchmidt`.

§7 Annexe — Données numériques

7.1 Tableau des normes (extrait)

p	$\ B_p\ _{op}$ (QR)	$\ B_p\ _{op}$ (GEN)	$\ B_p\ _{HS}^2$ (toutes conv.)	$(p-4)/3$
7	0,667	0,667	1,000	1,000
11	0,856	0,791	2,333	2,333
13	0,899	0,847	3,000	3,000
17	0,932	0,915	4,333	4,333
19	0,945	0,943	5,000	5,000
23	0,966	0,966	6,333	6,333
29	0,989	0,986	8,333	8,333
31	0,988	0,984	9,000	9,000
37	0,994	0,993	11,000	11,000
41	0,997	0,995	12,333	12,333
43	0,995	0,990	13,000	13,000

Concordance exacte sur 92 premiers (vérifiée à 10^{-15}).

7.2 Test de coupe inférieure (extrait, $\eta = 0,3$, $t = 30$)

p_{min}	$ D_{QR} $	$ D_{GEN} $	$ D_{SYM} $	max diff rel
7	0,387	0,291	0,303	$2,56 \times 10^{-1}$
11	0,380	0,282	0,283	$2,61 \times 10^{-1}$
13	0,271	0,273	0,274	$1,78 \times 10^{-2}$
19	0,270	0,270	0,270	$7,73 \times 10^{-5}$
31	0,234	0,234	0,234	$9,44 \times 10^{-5}$

7.3 Reproductibilité

Tous les calculs reproductibles via les scripts : - `setup.py` — définition des conventions et fonctions de mesure - `main_analysis.py` — analyse sur 92 premiers - `test_invariance.py` — comparaison fine spectres et traces - `td4_test.py` — résidu D_{K^p} sur droite critique - `robustness_test.py` — variation P_{max}

et η - `final_diagnosis.py` — test de coupe inférieure et variation à p fixé - `alternative_candidate.py` — sous-groupe d'ordre 3 vs générique

Précision : float64 NumPy. Vérifications à 10^{-12} et 10^{-15} . Aucun calcul mpmath nécessaire ici (résultats portent sur formules fermées combinatoires).

Le programme ne revendique pas une fermeture globale ; il construit une discipline du passage, capable de démontrer, mesurer, dépromouvoir et clore proprement les voies fausses.

Fin de la note technique $K^p.2$.